

**ALGUNS ASPECTOS DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA  
EM ESTRUTURAS "OFF-SHORE"**

**TESE DE MESTRADO  
ELABORADA POR  
LINEU JOSÉ PEDROSO**

**ORIENTADOR: Prof. NELSON FRANCISCO F. EBECKEN**

**COORIENTADOR: Prof. SÉRGIO H. SPHAIER**

**COPPE / UFRJ**

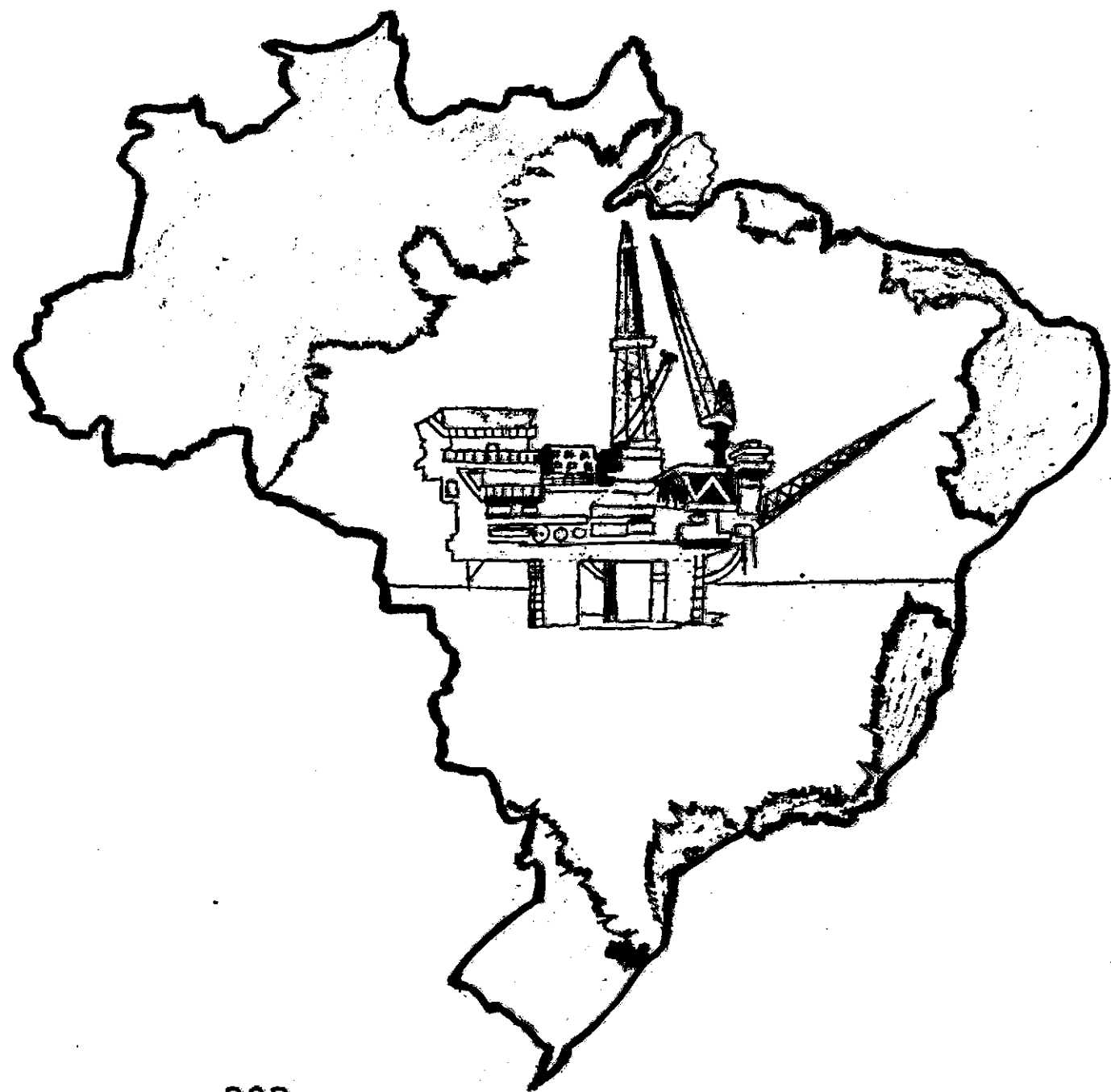
**Programa de Engenharia Civil**

**ESTRUTURAS**

**Rio de Janeiro, R.J. - Brasil**

**MARÇO, 1982**

# ALGUNS ASPECTOS DA INTERAÇÃO-FLUIDO ESTRUTURA EM ESTRUTURAS "OFF-SHORE"



POR

Lineu José Pedroso

ALGUNS ASPECTOS DA INTERAÇÃO  
FLUIDO-ESTRUTURA EM ESTRUTURAS "OFF-SHORE"

Lineu José Pedroso

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovado por:

  
Nelson Francisco Favilla Ebecken

  
Sergio Hamilton Sphaier

  
Luiz Bevilaqua

  
Edison C. Prates de Lima

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
MARÇO DE 1982

PEDROSO, LINEU JOSÉ

Alguns Aspectos da Interação Fluido-Estrutura em Estruturas no Mar |Rio de Janeiro| 1982.

338 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1982)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia.

1. Interação Fluido-Estrutura
2. Estruturas Off-Shore
3. Dinâmica de Estruturas
4. Ação de Ondas Sobre Estruturas

A um homem, que sempre quis um  
livro escrever, meu pai ...

A uma pessoa especial, minha  
alfabetizadora, professora  
notável e modelo de mestra.  
Punindo-me diante da lousa,  
como exemplo, admoestava-  
-me rumo ao saber; a uma  
mulher singular, à minha  
mãe "em memória" ...

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson F. F. Ebecken pela orientação deste trabalho; pelo estímulo e entusiasmo recebido, pelo interesse demonstrado, pelo sempre disponível em atitude de auxílio; pela ajuda no reencontro do caminho, quando dele por vezes me afastei; pela confiança que em mim se despertou, oriunda da própria confiança depositada no meu trabalho; pelas suas recatadas manifestações, que em última instância, eram o endosso de que, o que eu me propunha fazer, realizava a contento.

Ao Professor Sergio H. Sphaier, pela sua orientação; pelos ensinamentos de hidrodinâmica e as muitas dúvidas esclarecidas; e em especial, pelo acesso a uma nova área do conhecimento, que alheia a minha formação, permitiu-me a redescoberta e o ajuste a muitas de minhas aspirações.

Ao Professor Augustin J. Ferrante, pela orientação inicial; pela visão universalista do assunto e pela objetividade demonstrada na condução e dosagem dos temas, e principalmente por me ter mostrado o alvo a ser alcançado.

Aos Professores: Sidney Santos, Edson P. de Lima, Paulo de Tarso T. Esperança, J. A. Aranha (IPT/USP), Pio T. Flores (ITA/CTA); a equipe do Laboratório de Computação Científica (LCC/CBPF), e outros tantos professores do Programa de Engenharia Civil, Mecânica e Oceânica, pela sempre acolhida; pelas discussões enriquecedoras e as freqüentes dúvidas que me foram sanadas.

Ao Programa de Engenharia Civil, na pessoa de seu Coordenador, Professor F. L. Lobo Carneiro, entusiasta e batalhador da Engenharia Off-Shore; pela oportunidade de ter estudado num programa tão expressivo e consolidado; bem como, aos seus professores e funcionários.

A Fundação Universidade do Rio Grande (FURG), e

o PICD/CAPEs, pelo suporte financeiro do Mestrado.

À Biblioteca Central de Engenharia, representada pelas suas bibliotecárias, estagiárias e funcionárias, que sempre me devotaram uma especial atenção; e em particular à Sr<sup>ta</sup>. Elisa Silva Amaral pelo auxílio nas pesquisas bibliográficas, e às constantes contribuições, nas mais variadas causas.

À Dra. Margot Ranck, pela ajuda nas versões de textos em língua estrangeira, e os sempre solícitos gestos de participação.

Aos amigos e colegas de Pós-Graduação, pela adesão a causa comum.

À Maria José Caetano de Mendonça e ao Sebastião Gilmar Fernandes pelo esmero do trabalho datilografado e à excelente confecção dos desenhos.

Ao desconhecido(a), fonte insondável de curiosidades, insano mistério que motiva e calcina; causa de tantos tropeços, e névoa espessa a ofuscar a caminhada; fator de fascínio, temores e muitos retrocessos; todavia, o alvo a convelir, e o ressurgir da chama a iluminar um novo rumo. Foi o magnífico esforço em desvendá-lo que, proporcionou-me a oportunidade de aprender um pouco mais.

A alguém misto de sonho e poesia;  
motivo e essência de muitas esperanças nesta caminhada ...

A Cláudia Maria Valadão Arruda,  
minha querida namorada ...

## SUMÁRIO

Apresenta-se uma sistematização lógica, básica e intuitiva do problema interação fluido-estrutura, orientado às estruturas no mar.

Na sua generalidade, o problema é identificado, caracterizado e classificado; voltando-se às estruturas n'água, é colocado num contexto físico e fenomenológico, nos seus aspectos mais qualitativos; todavia, sua abordagem se degenera para um tratamento simplificado, através das duas formulações clássicas conhecidas: (a) equação de Morison, (b) teoria da difração linear invícita; envolvidas em todas suas manifestações e conseqüências.

A magnitude dos efeitos de interação é quantificado através das forças induzidas pelas ondas; depois comparadas e estimadas a importância relativa destas, em função de certos parâmetros significativos, que definem a natureza e o domínio destes efeitos.

Finalmente estuda-se o comportamento dinâmico das estruturas no mar, com muitas de suas implicações, mostrando-se algumas aplicações e resultados.

Para a obtenção de resultados e a comparação destas formulações, programas de computador foram especificamente desenvolvidos; bem como orientados à algumas aplicações típicas e significativas onde se efetuou a análise hidro-estrutural dinâmica completa.



ABSTRACT

The fluid-structure interaction problem is presented in a logical, basic and intuitive systematization, concerning offshore structures.

The problem is identified, characterized and classified, as a whole; when particularized to structures in water, it is placed in a physical and phenomenologic context, in its more qualitative aspects; however, its abordage degenerates in a simplified treatment, through two known classical formulations: (a) Morison's operation, (b) inviscid linear diffraction theory, involved in all their manifestations and consequences.

The magnitude of the interaction effects were quantificated through wave-induced forces, later compared and estimated its relative importance, in function of certain significant parameters, which define the nature and domain of these effects.

Finally it is studied the dynamic behaviour, of offshore structures, with many of its implications showing some applications and results.

To obtain results and the confrontation of this formulations, computer programs were developed and directed to some typical and significant applications, in which complete dynamic hydro-structural analysis were accomplished.

# LISTA DE SÍMBOLOS (\*)

$A$	= amplitude da onda (M)
$A_s$	= área da seção transversal ( $m^2$ )
$a$	= raio da estrutura
$a$	= amplitude do movimento da estrutura
$C$	= força de amortecimento por unidade de velocidade
$C_c$	= força de amortecimento crítico por unidade de velocidade
$C_D$	= coeficiente de arraste
$C_I$	= coeficiente de inércia
$C_L$	= coeficiente de força transversal
$C_M$	= coeficiente efetivo de inércia
$c$	= celeridade da onda
$c_g$	= velocidade de grupo
$D$	= diâmetro, dimensão característica da estrutura
$E$	= energia da onda
$E$	= módulo de elasticidade ( $kgf/m^2$ )
$E_c$	= energia cinética
$e$	= espessura da parede
$F$	= forças genéricas ( $kgf$ )
$F_A$	= força de arraste ( $kgf$ )
$F_D$	= força de difração ( $kgf$ )
$F_I$	= força de inércia ( $kgf$ )
$F_k$	= força de Froude-Krilov ( $kgf$ )
$F_s$	= força de sustentação (transversal) ( $kgf$ )
$F_o$	= amplitude genérica das forças
$(F_o)_m$	= amplitude genérica máxima para as forças
$f$	= frequência genérica (Hz)
$f_A$	= força de arraste por unidade de comprimento ( $kgf/m$ )
$f_D$	= força de difração por unidade de comprimento ( $kgf/m$ )
$f_I$	= força de inércia por unidade de comprimento ( $kgf/m$ )
$f_k$	= força de Froude-Krilov por unidade de comprimento ( $kgf/m$ )
$f_s$	= força de sustentação por unidade de comprimento ( $kgf/m$ )

---

(\*) Quando um símbolo é usado com significado diferente ao apresentado, é definido na ocasião

$F_N$	=	frequência natural da estrutura (Hz)
$f_s$	=	frequência da força transversal (Hz)
$f_\omega$	=	frequência da onda (Hz)
$(f_o)_m$	=	amplitude genérica máxima para as forças unitárias
$g$	=	aceleração da gravidade ( $9,81 \text{ m/s}^2$ )
$H$	=	altura da onda (da crista ao ventre) (m)
$H_n$	=	funções de Hankel de ordem n
$h$	=	profundidade d'água (m)
$I$	=	momento de inércia da seção ( $\text{m}^4$ )
$i$	=	imaginário ( $\sqrt{-1}$ )
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	=	unitários na direção x, y e z
$J_n$	=	função de Bessel de ordem n
$K$	=	rigidez da estrutura
$k$	=	número de onda ( $K = \frac{2\pi}{L}$ )
$L$	=	comprimento de onda (m)
$\ell$	=	comprimento da estrutura (m)
$M$	=	massa genérica total (kg)
$M_z$	=	momento em relação ao eixo Z (kgf.m)
$M^*$	=	massa virtual total (kg)
$M'$	=	massa adicional total (kg)
$m$	=	massa por unidade de comprimento (kg/m)
$m$	=	massa efetiva por unidade de comprimento
$M_{ad}$	=	massa adicional
$M_e$	=	massa da estrutura
$M_a$	=	massa da água no interior da estrutura
$N$	=	frequência natural (Hz)
$N_{kc}$	=	número de Keulegan-Karpenter
$\hat{n}$	=	vetor normal unitário
$P$	=	potência (kgf.m/s)
$p$	=	pressão genérica ( $\text{kgf/m}^2$ )
$Q$	=	quantidade de movimento
$Q$	=	fator de amplificação dinâmica
$Q$	=	vazão
$q$	=	vazão por unidade de comprimento
$R$	=	raio genérico
$R_{I,II,III,IV}$	=	relação de forças
$Re$	=	número de Reynolds
$r$	=	coordenada polar na direção radial

$S$	=	número de Strouhal
$S$	=	comprimento de arco
$T$	=	período ( $T = 1/f$ )
$t$	=	tempo
$U$	=	velocidade na corrente livre
$U_m$	=	velocidade máxima
$u, v, w$	=	componentes da velocidade
$\underline{V}$	=	vetor velocidade
$X_0, x_0$	=	amplitude do deslocamento
$x$	=	coordenada da estrutura, deslocamento
$\dot{x}$	=	velocidade
$\ddot{x}$	=	aceleração
$\underline{\Phi}$	=	auto vetor
$\phi$	=	função potencial de velocidades
$y$	=	altura medida do nível da água
$\alpha$	=	ângulo
$\beta$	=	relação entre frequências ( $\beta = f_\omega / f_N$ )
$\Delta$	=	pequenos incrementos
$\delta$	=	ângulo de fase
$\eta$	=	elevação da superfície livre
$\nu$	=	viscosidade cinemática
$\nu$	=	coeficiente de Poisson
$\xi$	=	taxa de amortecimento
$\xi$	=	raio da órbita na direção $x$
$U$	=	volume
$\rho$	=	densidade da água
$\rho_e$	=	densidade da estrutura
$\Gamma$	=	circulação
$\sigma$	=	tensões normais
$\tau$	=	tensões cizalhantes
$\Omega$	=	fronteira (contorno)
$\psi$	=	função de corrente
$\psi$	=	ângulo
$\theta$	=	coordenada polar angular
$\theta_f$	=	ângulo de fase ( $\theta_f = kx - \omega t$ )
$\zeta$	=	raio da órbita vertical das partículas
$\zeta$	=	taxa de amortecimento
$\omega$	=	frequência circular genérica

$\vec{w}$	=	vetor velocidade
$\perp$	=	perpendicular (normal)
$\forall$	=	qualquer

### SUBÍNDICES

$r, \theta, t$	=	derivadas em relação a estas grandezas
$o$	=	relativo a águas profundas
$l$	=	primeiro modo (N, T, $\omega$ )
$T$	=	total

### ÍNDICE SUPERIOR

$f$	=	fluido
$x \approx 0(1)$	=	a variável $x$ é aproximadamente da ordem de grandeza de 1
$x \geq 0(1)$	=	a variável $x$ é maior ou igual a ordem de grandeza de 1
$x < 0(ka)$	=	a variável $x$ é menor do que a ordem de grandeza do parâmetro ( $ka$ )

ABREVIATURAS

acel	=	aceleração
A.E.	=	aeroelasticidade
c/	=	com
c <sub>te</sub>	=	constante
c.c.	=	condições de contorno
c.i.	=	condições iniciais
c.s.q.d.	=	como se queria demonstrar
def.	=	deflexão
def̄.	=	deformação
desl.	=	deslocamento
dist.	=	distância
Eq.(s)	=	equação e equações
Est.	=	estrutura
esc.	=	escoamento
E.M.	=	equação de Morison
F <sub>A</sub>	=	força de arraste
F <sub>ç</sub>	=	força
F <sub>D</sub>	=	força de difração
F <sub>ç̄</sub>	=	função
F <sub>I</sub>	=	força de inércia
F <sub>E</sub>	=	fluidoelasticidade
F <sub>K</sub>	=	força de Froude-Krilov
H <sub>E</sub>	=	hidroelasticidade
i.e.	=	isto é
IFE	=	interação fluido-estrutura
IOE	=	interação onda-estrutura
L.C.	=	linha de corrente
L.E	=	linha de escoamento
m/	=	mesmo
mov.	=	movimento
N.L.	=	não linear
osc.	=	oscilação
p'	=	por
p/	=	pela
p <sub>q</sub>	=	para
p.i.	=	por isto

p.q.	=	porque
pt.	=	ponto
pb.	=	problema
p.v.c.	=	problema de valor de contorno
PIFES	=	problema de interação fluido-estrutura simplificado
q.	=	que
q/. Q/	=	quando
q.q.	=	qualquer
resp.	=	resposta
R.U.	=	retilíneo uniforme
S/	=	sempre
t.q.	=	tal que
veloc.	=	velocidade
vl.	=	valor
vib.	=	vibração

LISTA DE FIGURAS (\*)

- Fig. 11.1 (\*) - Linhas de Corrente num Escoamento Potencial
- Fig. 11.2 (\*) - Ortogonalidade das Linhas de Corrente e Equipotenciais
- Fig. 11.3 (\*) - Vazão entre Duas Linhas de Corrente
- Fig. 11.4 (\*) - Escoamento Retilíneo Uniforme
- Fig. 11.5 (\*) - Fonte e/ou Sumidouro
- Fig. 11.6 (\*) - Vórtice Livre
- Fig. 11.7 (\*) - Fonte num Escoamento Retilíneo
- Fig. 11.8 (\*) - Fonte e Sumidouro de Mesma Intensidade
- Fig. 11.9 (\*) - Linhas de Corrente e Equipotenciais para um Dipólo Bi-Dimensional
- Fig. 11.10(\*) - Dipólo
- Fig. 11.11(\*) - Área Física de Interesse Prático (Cilindro Virtual) Gerada pela Composição de Escoamentos
- Fig. 11.12(\*) - Definição dos Elementos
- Fig. 11.13(\*) - Esquema dos Campos Cinemáticos das Partículas do Fluido da Onda
- Fig. 11.14(\*) - Faixas de Validade das Teorias de Onda
- Fig. 11.15(\*) - Altura de Rebentação da Onda e Regiões de Vali-

---

(\*) O asterístico colocado após a indicação da Figura, caracteriza as gravuras que foram reproduzidas das referências bibliográficas; as demais, foram obtidas pelo autor.



dade das várias teorias de onda

Fig. II.15(\*) - Perfis de  $u$  e  $\dot{v}$

Fig. II.16(\*) - Perfis de  $u$  e  $\dot{v}$

Fig. III.1 (\*) - Triângulo Fluidoelástico

Fig. III.2 (\*) - Um Exemplo Ilustrativo do Problema Fluidoelástico

Fig. III.3 (\*) - Comando Limite ao Longo da Superfície de um Carro

Fig. III.4 (\*) - Desprendimento de Vórtice dentro de uma Cavidade (Acústica)

Fig. III.5 - Fluxo Oscilante em Torno

Fig. III.6 (\*) - Distribuição das Pressões Causadas pela Formação de Vórtice

Fig. III.7 (\*) - Regimes de Escoamento Passando por um Cilindro

Fig. III.8 (\*) - Modelo de Interação Fluido-Estrutura

Fig. III.9 (\*) - Números de Strouhal em Função de  $Re$  para um Cilindro Circular

Fig. IV.1 - Cilindro Fixo num Escoamento Irrotacional

Fig. IV.2 (\*) - Distribuição de Pressão em Torno de um Corpo Cilíndrico (Fluxo Bi-Dimensional)

Fig. IV.3 (\*) - Força de Sustentação

Fig. IV.4 (\*) - Dipólo num Escoamento Retilíneo com Circulação

Fig. IV.5 (\*) - Forças Devido a um Fluxo Uniforme Passando por

## um Cilindro

- Fig. IV.6 (\*) - Estrutura Flexível Vibrando sob Ação da Onda
- Fig. IV.7 (\*) - Variação do Coeficiente de Arraste, com o Número de Reynolds ( $Re$ )
- Fig. V.1 - Esboço do Problema
- Fig. V.2 - Onda Incidindo sobre a Estrutura
- Fig. V.3 - Valores de  $A$  ( $Ka$ )
- Fig. V.4 - Valores do ângulo de Fase (Graus)
- Fig. V.5 - Força Horizontal
- Fig. V.6 - Valores do Coeficiente Efetivo de Inércia
- Fig. V.7 - Valores de  $AKH$  ( $Kh$ ) e  $BKH$  ( $Kh$ ) Versus ( $Kh$ )
- Fig. V.8 - Valores de  $F_x$  em Função de ( $Kh$ ) para Vários ( $Kh$ )
- Fig. V.9 - Momento de Tombamento ( $M_z$ ) em Função de ( $Kh$ ) para Diversos ( $Ka$ )
- Fig. V.10 - O Diagrama Polar Mostra o Fator de Espalhamento ao Redor de um Corpo Cilíndrico. A Distribuição de Pressões ( $p/p_o$ ) e a Elevação Relativa da Superfície Livre ( $\eta/H$ ) Correspondem Respectivamente: 0.32 e 0.5 deste Fator
- Fig. V.11 (\*) - Distribuição das Elevações Relativas da Superfície Livre ao Redor do Corpo -  $Ka = 1.4$
- Fig. V.12 - Elevação Relativa da Superfície Livre ao Redor do Corpo, para Vários ( $Ka$ )

- Fig. V.13 - Comparação da Força por Unidade de Comprimento (tf/m) para a Solução Linear e Não Linear (Stokes - V)
- Fig. V.13(\*) (a) - Efeitos Não Lineares Devidos as Forças de Onda de 2.<sup>a</sup> Ordem
- (b) - Comparação Entre a Solução Linear e de 2.<sup>a</sup> Ordem, com Dados Experimentais
- Fig. V.14 - Pressões em gf/cm<sup>2</sup> ao Redor da Metade de um Corpo Cilíndrico, para Intervalos de 30° do Período da Onda (o Contorno Definido pela Extremidade da Seta, Mostra a Linha de Pressão Zero)
- Fig. V.15 - Distribuição das Pressões com a Profundidade (gf/cm<sup>2</sup>) para Posições da Onda na Origem (wt=0) e em Crista ( $wt = \frac{\pi}{2}$ ), Conforme a Fig. Anterior
- Fig. V.16 - Defasagens da Pressão, para Pontos do Corpo Durante um Período da Onda
- Fig. V.17 - Pressões em gf/cm<sup>2</sup> ao Redor da Parede do Corpo para Vários Intervalos do Período da Onda, com  $T = 1,50 \text{ S}$
- Fig. V.17a - Distribuição das Pressões na Superfície de um Cilindro Circular Rígido, para Pontos em Diversos ângulos  $\theta$  a uma Profundidade  $(\frac{h}{6})$
- Fig. V.18 (\*) - Variação das Pressões com Profundidade em (gf/cm<sup>2</sup>)
- Fig. V.19 - O Diagrama Polar mostra a Distribuição das Pressões ( $p/p_0$ ) sobre um Cilindro Circular de Raio  $a$  Devido ao Efeito de Espalhamento da Onda

- Fig. V.20 (\*) - Elevação Relativa da Superfície Livre a Frente e Atrás do Corpo
- Fig. V.21 - Forças e Momentos Versus Frequência da Onda, para Diversos Raios da Estrutura
- Fig. VI.1 - Parâmetro de Esteira ( $\frac{H}{D}$ ) Versus Parâmetro de Espalhamento ( $Ka$ )
- Fig. VI.2 - ( $\frac{H}{D}$ ) Versus ( $Kh$ ) para Relação  $R_1 = \text{Arraste}/\text{Inércia} = 1$  com  $\frac{H}{L} = \frac{1}{7}$
- Fig. VI.3 - ( $Ka$ ) Versus ( $Kh$ ) para Relação  $R_1 = 1$  com a Linha de Máxima Inclinação da Onda
- Fig. VI.4 - ( $\frac{H}{D}$ ) Versus ( $Ka$ ) para Curvas Representativas da Relação Unitária de Forças
- Fig. VI.5 - Variação no Tempo das Forças Adimensionais de Arraste, Inércia, Total de Morison, Fraude-Krylov, Difração e a Elevação Relativa da Superfície Livre - ( $\omega t$  em Graos)
- Fig. VI.6 - Variação das Forças Adimensionais com a Profundidade ( $\omega t$  em Graos)
- Fig. VI.7a - Curvas Representativas do Domínio e Contribuições das Forças
- Fig. VI.7b - Detalhe da Figura Anterior
- Fig. VI.8 - Percentagens de Contribuição das Parcelas Adimensionais para a Composição das Forças Totais
- Fig. VI.9 - Representação das Regiões de Aplicabilidade da

Teoria da Difração Invícita e da Equação de Morison para Estruturas Cilíndricas

- Fig. VII.1 (\*) - Vibrações Forçadas em Sist. com 1 G.L. (com Amortecimento Viscoso)
- Fig. VII.2 (\*) - Regiões Características do Comportamento da Resposta
- Fig. VII.3 (\*) - Ação do Fluxo num Sistema com 1 G.L.
- Fig. VII.4 (\*) - Resposta Dinâmica Típica para uma Estrutura para um Fluxo Oscilatório ( $f$  = Frequência da Onda;  $f_N$  = Frequência Natural)
- Fig. VII.5 - Idealização Estrutural (Modelos Planos)
- Fig. VII.6 - Forças Nodais Máximas Devido a Onda de Projeto para as Torres Modeladas conforme a Gravura
- Fig. VII.7 - Modos de Forma e Resposta Máxima (Envoltória) para Estrutura E-I.
- Fig. VII.8 - Modos de Forma, e Respostas Máximas (Envoltória) na Estrutura E-II
- Fig. VII.9 - Modelo de uma Estrutura "OFF-SHORE" Tipo Gravidade (Ilha Artificial)
- Fig. VII.10 - Modos de Forma, e Resposta Máximas (Envoltória) na Estrutura E-III
- Fig. VII.11a - Modelo Típico de Plataforma "OFF-SHORE" Tipo Concreto Gravidade
- Fig. VII.11b - Secção Vertical

- Fig. VII.11c - Secção Horizontal
- Fig. VII.12 - Situação de Forças Nodais Máximas Devido a Ação da Onda de Projeto, para Estrutura Modelada pelo Pórtico da Figura (EFEITOS GLOBAIS)
- Fig. VII.13 - Modos de Forma, e Resposta Máxima (Envoltória) para Estrutura E-IV
- Fig. VII.14 - Tipos de Estruturas e suas primeiras Frequências Naturais ( $N_1$ )

ÍNDICE

Pág.

## CAPÍTULO I - O PROBLEMA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

1.1	- Uma Situação .....	1
1.2	- Identificação do Problema .....	3
1.3	- Caracterização do Problema .....	5
1.4	- Interação é: .....	6
1.5	- O Porquê do Trabalho .....	6
1.6	- Aplicações Significativas .....	7
1.7	- Objetivos do Trabalho .....	9
1.8	- Justificativas .....	10
1.9	- Questões a Investigar .....	12
1.10	- A Inter-Relação Fluido-Estrutura .....	12
1.11	- A Interação Fluido-Estrutura e Outros Campos da Mesma Ciência .....	14
1.11-1	- Aeroelasticidade .....	16
1.11-2	- Hidroelasticidade .....	16
1.12	- Hipóteses, Pressupostos e Considerações .....	18
1.12-1	- Restrições .....	18
1.12-2	- Suposições .....	18

CAPÍTULO II - TEORIA LINEAR DE ONDAS DE PEQUENAS  
AMPLITUDES

11.1-1	- Introdução .....	21
11.1-2	- Equações Básicas e Formulação do Problema Hidrodinâmico .....	22
11.1-3	- Estudo do Problema de Valor de Contorno .....	23
11.1-3.1-	Condições Iniciais .....	25
11.1-3.2-	Condições de Contorno .....	25
11.1-4	- Linearização do Problema .....	28
11.1-5	- Resolução Geral do Problema Simplificado .....	30
11.1-6	- Determinação dos Campos Cinemáticos .....	35
11.1-6.1-	Velocidades e Acelerações .....	35

11.1-6-2-	Deslocamento das Partículas D'Água .....	36
11.1-6-3-	Equações Degeneradas, em Função da Profundi- dade Relativa .....	38
11.1-6.4-	Outras Teorias de Onda .....	42
11.1-6.5-	Comparação entre as Duas Teorias mais Utilizadas .....	44

### CAPÍTULO III - FENOMENOLOGIA DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

III.1	- Introdução .....	48
III.2	- Caracterização Gráfica da Interação Fluido- -Estrutura .....	49
III.2-1	- Triângulo Fluídoelástico .....	49
III.3	- Problema da Interação, em Estruturas Elásticas Submersas .....	51
III.4	- Natureza Física do Problema .....	53
III.5	- Estruturas Flexíveis e Vibrantes .....	55
III.6	- Efeitos da Formação de Vórtices .....	57
III.6-1	- Mecanismo da Formação de Vórtices .....	58
III.6-2	- Vórtice na Esteira de uma Estrutura Rígida ...	60
III.6-3	- Influência do Movimento da Estrutura Sobre a Esteira .....	60
III.7	- Classificação de Alguns Casos de Interação Fluido-Estrutura .....	61
III.8	- Formas de Abordagem do Problema Interação ....	64
III.9	- Variáveis Significativas Adimensionais .....	66
III.9-1	- Parâmetros da Onda .....	66
III.9-2	- Parâmetro de Interação da Onda .....	67
III.9-3	- Parâmetro de Espalhamento ( $k_a$ ) .....	67
III.9-4	- Parâmetro de Esteira ( $H/D$ ) .....	67
III.9-5	- Número de Keulegan-Carpenter ( $N/K_c$ ) .....	68
III.9-6	- Número de Reynolds ( $Re$ ) .....	68
III.9-7	- Número de Mach ( $M_a$ ) .....	69
III.9-8	- Amplitude Adimensional e Velocidade Reduzida .	69
III.9-9	- Parâmetro Geométrico .....	70
III.9-10-	- Parâmetro de Massa .....	70



III.9-11	-	Número de Strouhal ( $S$ ) .....	71
III.9-12	-	Fator de Amortecimento ( $\zeta$ ) .....	71
III.9-13	-	Constatação .....	72
III.10	-	Desprendimento de Vórtices Devido a Ação da Onda .....	73
III.10-1	-	Introdução .....	73
III.10-2	-	Frequência da Força de Sustentação .....	74
III.10-3	-	Coeficiente de Sustentação ( $C_L$ ) .....	75
III.11	-	Análise das Vibrações Induzidas por Vórtices .	75
III.12	-	Métodos de Prevenção das Oscilações por Vórtices .....	77
III.12-1	-	Controle de Um/N.D .....	77
III.12-2	-	Massa, Amortecimento e Forma da Seção .....	78
III.13	-	Exemplo Simples .....	79
III.14	-	Um Ensaio para Análise Física e Intuitiva do Problema Interação Onda-Estrutura .....	82
III.14-1	-	Efeito da Viscosidade devido a Presença da Estrutura nas Ondas .....	83

#### CAPÍTULO IV - FORÇAS PROVOCADAS PELA AÇÃO DAS ONDAS SOBRE ESTRUTURAS DELGADAS

IV.1	-	Introdução .....	87
IV.2	-	Formulação de Morison por uma Consideração de Energia Cinética .....	88
IV.2-1	-	Cilindro com Movimento Uniforme Acelerado, num Fluido em Repouso .....	88
IV.2-2	-	Cilindro Fixo num Fluxo Acelerado .....	97
IV.3	-	Fórmula de Morison por uma Consideração de Quantidade de Movimento .....	104
IV.4	-	Cálculo das Forças e Momentos .....	106
IV.4-1	-	Forças por Unidade de Comprimento de Estrutura .....	106
IV.4-2	-	Forças Totais Sobre a Estrutura .....	107
IV.5	-	Expressão Assintótica da Fórmula de Morison...	108
IV.6	-	Forças Transversais devido ao Desprendimento	

	de Vórtices .....	112
IV.6-1	- Fundamento Teórico da Força de Sustentação ...	112
IV.6-2	- Cálculo da Força de Sustentação ( $F_s$ ) .....	115
IV.7	- Forças de Ondas Sobre Estruturas Flexíveis ...	116
IV.8	- Escolha dos Coeficientes de Forças Hidrodinâmicas ( $C_M$ , $C_D$ , $C_L$ ) .....	119
IV.8-1	- Fatores que Influenciam em $C_D$ .....	119
IV.8-2	- Fatores que Influenciam em $C_M$ .....	121
IV.9	- Aplicação .....	122

## CAPÍTULO V - AÇÃO DE ONDAS EM ESTRUTURAS DE GRANDES DIMENSÕES

V.1	- Introdução .....	126
V.2	- Efeito de Espalhamento da Onda .....	127
V.3	- Teoria da Difração Linear para Ondas Planas .....	128
V.3-1	- Formulação do Problema .....	129
V.3-2	- Potencial de Difração ( $\phi_s$ ) .....	132
V.3-3	- Campo de Pressões .....	135
V.3-4	- Forças e Momentos .....	137
V.3-5	- Massa Aparente (Virtual) .....	139
V.3-6	- Elevação da Superfície Livre .....	148
V.4	- Outras Formulações para o Problema da Difração .....	151
V.5	- Difração Não Linear e Viscosa .....	157
V.5-1	- Aplicação .....	158
V.6	- Resultados .....	162

## CAPÍTULO VI - ESTUDO COMPARATIVO DO CAMPO DE APLICABI- LIDADE E DA IMPORTÂNCIA RELATIVA DOS FA- TORES INTERVENIENTES NO CÔMPUTO DAS SOLI- CITAÇÕES DE ONDAS

VI.1	- Introdução .....	174
VI.2	- Curva Limítrofe dos Efeitos Inerciais e/ou	

	Viscosos .....	175
VI.2-1	- Variação das Forças com a Profundidade .....	176
VI.3	- Pesquisa das Condições da Força de Pico .....	178
VI.4	- Predominância das Forças de Inércia e/ou Arraste .....	180
VI.4-1	- Um Outro Resultado Importante .....	182
VI.4-2	- Relação ( $k_a$ ) Versus ( $k_h$ ) .....	185
VI.5	- Morison Versus Difração .....	186
VI.5-1	- Relação de Forças .....	186
VI.5-2	- Forças Adimensionais .....	190
VI.5-3	- Forças Adimensionais Versus o Parâmetro de Espalhamento .....	196
VI.6	- Comentários .....	197
VI.7	- Conclusões .....	201

## CAPÍTULO VII - COMPORTAMENTO HIDRO-DINÂMICO DE ESTRUTURAS NO MAR

### PARTE 1

VII.1-1	- Introdução .....	204
VII.1-2	- Sistemas com um Grau de Liberdade .....	206
VII.1-2-1-	Vibrações Livres .....	207
VII.1-2-2-	Resposta para um Carregamento Harmônico Simples .....	211
VII.1-3	- Sistemas com Vários Graus de Liberdade (SUGL) ..	217
VII.1-3.1-	Vibrações Livres em Sistemas com Muitos Graus de Liberdade .....	218
VII.1-3.2-	Método da Superposição Modal .....	221
VII.1-4	- Equações do Movimento .....	224
VII.1-5	- Solução da Equação do Movimento Linearizada ..	224
VII.1-5.1-	Movimento Oscilante da Onda .....	225
VII.1-6	- Propriedades Físicas para a Análise Dinâmica..	228
VII.1-6.1-	Massa .....	228

## PARTE 2 - APLICAÇÕES E RESULTADOS

VII.2-1	-	Introdução .....	232
VII.2-2	-	Idealização Estrutural .....	233
VII.2-3	-	Torre de Concreto com Seção Constante Estrutura = E-1 .....	236
VII.2-4	-	Torre de Concreto com Seção Variável .....	240
VII.2-5	-	Ilha Artificial (Grande Torre Hiperbólica)...	240
VII.2-6	-	Estrutura "Off-Shore" Tipo Gravidade .....	243

## PARTE 3 - CONCLUSÕES, DISCUSSÕES E RECOMENDAÇÕES

VII.3-1	-	Conclusões .....	254
APÊNDICE I	-	Tabelas Matemáticas .....	258
APÊNDICE II	-	Rudimentos de Hidromecânica .....	262
APÊNDICE III	-	Tabelas de Massa Adicional .....	292
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		.....	293

## CAPÍTULO I

### O PROBLEMA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

#### 1.1 - UMA SITUAÇÃO

É sabido de todos quantos têm consciência da época em que vivemos, que a humanidade atravessa uma fase crítica, onde fatores de todas as ordens e naturezas têm influenciado, direta ou indiretamente, na criação de um clima de incertezas, que pode comprometer a tão ameaçada ordem global ora existente.

Entre todas as causas que podem desestabilizar a economia dos povos, nem uma tem sido tão áspera e marcante, quanto o impasse criado pela crise de Energia.

A economia do mundo, que fora até pouco submetida a um ritmo de crescimento espetacular, desde a última guerra, sofreu um desaquecimento sem precedentes.

É notório, que o desenvolvimento ocorrido neste período decorreu, principalmente, dos resultados obtidos pelos países fortemente desenvolvidos.

Entre outros fatores que podem explicar este crescimento citam-se o avanço tecnológico, a existência de mão-de-obra barata e a participação do Estado no processo de acumulação de capital.

Como não se produz riquezas sem energia, ou seja, como o crescimento econômico e o consumo de Energia estão estritamente relacionados, a evolução do nível de consumo e sua repercussão sobre a estrutura energética merecem uma análise detalhada.

Se feita uma análise do balanço energético mundial, pode-se facilmente constatar o nível de participação do Petróleo, como fonte preponderante de energia, nas últimas décadas.

das. Todavia, a crise do Petróleo em 1973 encerrou um longo período de estabilidade dos preços no mercado mundial e viabilizou economicamente a exploração do petróleo "*off shore*" e em outras áreas de exploração mais onerosas, ensejando também a aplicação de métodos não convencionais de recuperação do óleo, além de estimular o desenvolvimento de fontes alternativas de energia.

Tendo em vista o alto preço do petróleo no mercado internacional e seu grande e crescente consumo, as economias dos povos se desestabilizaram, passando por um período cujas conseqüências, parecem por vezes, serem incontrolláveis.

Daí porque, nas tentativas de reduzir a dependência externa de energia, também o Brasil, que sempre teve no petróleo uma parcela expressiva na participação do balanço energético nacional, deverá superar esta dificuldade a qualquer custo, salvaguardando a atividade econômica dos efeitos recessivos da conjuntura internacional, sem prejudicar o ritmo do desenvolvimento, através de medidas, algumas das quais ligadas direta ou indiretamente ao setor energético.

Não basta o racionamento do petróleo como solução para o impasse, pois o racionamento significa recessão. Sem energia não se produz riqueza.

A limitação do consumo sem recessão é possível mediante a adoção de medidas concretas, que entre outras citam-se:

- implementação de estudos e investigações ligadas à área tecnológica, visando criar e otimizar sistemas, capazes de desenvolver formas que conduzam a economia, ao conforto e a segurança;
- a exploração de petróleo na plataforma submarina brasileira;

- aumento da oferta de transporte através da navegação costeira e interior;
- implementação de técnicas de conservação e diminuição do consumo de energia;
- desenvolvimento das fontes alternativas de energia.

Estas medidas por si sô carecem para sua concretização de praticamente uma revolução tecnológica, a ponto de no mais curto espaço de tempo, se possam granjear resultados animadores, e que venham atender o objetivo nacional de reduzir o espaço que nos separa das nações mais desenvolvidas.

Tendo em vista a atender essas metas, é que o presente trabalho, como será visto no seu desenvolvimento, encontra-se naturalmente vocacionado a contribuir, por pouco que seja, com procedimentos que venham participar do encontro das grandes aspirações nacionais do momento; inserindo-se por isso, perfeita e adequadamente às prementes prioridades brasileiras.

## 1.2 - IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA

É de todos sabido, que mesmo antes do nascimento, na fase intra-uteriana, cada indivíduo encontra-se imerso em fluido, dentro de uma câmara especial.

E, desde cedo o homem se vê diante de um imenso meio, constituído de ar e água. Seus primeiros contatos com estes entes virtuosos e providos de qualidades singulares, sempre causaram-lhe admiração, temor, respeito e mistificação.

Portanto, é da natureza humana a condição primeira e instintiva de aproximação e de expectativas diante deste meio que o cerca; e que é portador de tamanhos predcados.

Este senso instintivo que acompanha cada um desde o nascimento, é uma noção primitiva da qual todos são portadores, como se abrigassem dentro de si, uma herança atávica, que os ligava a elos desconhecidos.

Existem razões suficientemente fortes para se compreender, que o extenso meio que envolve o ser é um espaço fluídico, predominantemente de ar e água.

Por outro lado, sabe-se, que o próprio indivíduo tem sua constituição básica formada, em sua quase totalidade por fluídos (água).

Se a água e o ar são fontes vitais para o indivíduo, entende-se facilmente que o fluido faz parte integrante e essencial da complexidade do fenômeno que chamamos de vida.

Daí porque, a existência do próprio indivíduo é um mecanismo de inter-relação com os fluidos.

Deste senso nato, surge no indivíduo a intenção de desvendar o véu espesso e obscuro que esconde as leis que regem esta inter-relação, da qual o ser busca auferir os benefícios oferecidos pelo advento desta causa, cuja existência, sente em suas próprias entranhas.

É pois desta forma, que na tentativa do homem governar a natureza, conhecer sua ação, e prever seus efeitos, que surge o conhecimento, que se sedimenta ao longo do tempo, através das observações e experiências, que vão lentamente se somando.

Por sua vez, entende-se facilmente, e não se precisa de muito esforço para se enxergar em volta e em si mesmo, a existência da inter-relação entre sólidos e fluidos, que se processa ao nível de um micro e macro cosmos. Basta apenas observar o sangue que percorre as veias, a seiva que ascende às árvores, os veículos que cortam os ares e as águas; as ondas do



mar, a ação dos ventos, e outras tantas manifestações, para se perceber que sempre estão presentes sólidos e fluidos. Desta constatação de caráter quase empírico, surge um conceito essencialmente importante, que identifica esta inter-relação, e que apropriadamente se denomina de "interação".

### 1.3 - CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

Do que foi exposto anteriormente, infere-se com facilidade, que aonde quer que exista o contato entre um sólido e um fluido, ocorre a inter-relação denominada de interação, que se caracteriza pela chamada Interação Fluido-Sólido.

É também sabido, que esta interação se dá em vários níveis, quer seja numa dimensão macroscópica e/ou microscópica, aparecendo com as devidas formas, implicações e propriedades.

Ainda que em outras áreas do conhecimento possam existir maneiras diferentes de identificar, classificar e abordar o referido problema, através do uso de terminologias próprias; neste trabalho procurou-se dar um enfoque orientado e consonante, com a formação em Engenharia de Estruturas.

Dada a identificação do problema, convém frisar que, a natureza íntima da interação aqui propugnada, entre tantos modos de inquirir a essência deste efeito, é qualificada através de grandezas identificadas como forças.

Como a existência das forças são de naturezas diversas, tais como: elétricas, magnéticas, moleculares, nucleares, etc., serão objetos deste estudo apenas as de origem mecânica, quase sempre caracterizadas pelo contato das partículas do sólido e fluido, que se tocam numa região característica que serve de fronteira entre o contorno dos dois meios, chamada de interface, e que possui propriedades particulares.

Estas forças estão associadas à presença de partículas fluídicas, e a existência do corpo perturbador do meio fluídico, através das grandezas cinemáticas, suas propriedades mecânicas e de constituição.

#### 1.4 - INTERAÇÃO É:

Tem sido observado, com muita freqüência, o uso indevido e a utilização inadequada do vocábulo interação. Segundo um dos mais completos e modernos dicionários brasileiro, (Aurélio) tem-se:

Interação. De inter + ação s.f. - ação que se exerce mutuamente entre duas ou mais coisas - ação mútua entre duas partículas ou dois corpos. - Forças que duas partículas exercem uma sobre a outra, quando estão suficientemente próximas. Em razão do transcrito, o uso deste vocábulo no presente trabalho, exprime com real significado, a sua mais perfeita adequação.

#### 1.5 - O PORQUÊ DO TRABALHO

Desde muito tempo, através da observação de certos fenômenos da natureza, ligados à presença de sólidos e fluidos, e em consonância com sua formação, o autor desenvolveu uma atração especial para o estudo e análise destes efeitos. As vaticinações e as especulações nesta área serviram para despertar uma forte intuição, que o tem levado a entender, que somente a compreensão física da inter-relação entre fluidos e sólidos, pode realmente conduzir a uma resposta real e concreta, neste campo tão ávido de realizações, e que promete resultados surpreendentes.

Sobre esta ótica, e considerando o interesse demonstrado por certos segmentos da instituição, onde o autor se

encontra ora vinculado, a estes estudos; e entre todos os campos possíveis e de abrangências dos mesmos, que serão apresentados, ou por si só inferidos entendeu-se de relevância, elege uma aplicação diretamente ligada ao problema original, e que conservando sua virtude e essência, contribui-se, ainda que restritamente, na consecução das duas primeiras medidas preconizadas no item Uma Situação, com o intuito desta forma, colocar uma pequena pedra no alicerce do conhecimento didático-científico nacional, e ao mesmo tempo servir de evocativo a outras tantas investigações nesta área ainda tão incipiente.

## 1.6 - APLICAÇÕES SIGNIFICATIVAS

Do até então exposto, se pretende agora objetivamente caracterizar as suas aplicações, que anteriormente não ficaram evidentes, como uma forma de melhor elucidar a utilidade destes estudos, tendo em vista a sua aplicabilidade.

A incorporação da experiência, dos resultados de estudos e os conhecimentos no campo da interação-fluido estrutural, fornecem um amplo espectro de utilização que envolve as mais diversas áreas da ciência, em cujas utilizações se destacam:

### 1. Estruturas no mar

- estruturas "off shore" (plataformas de exploração de petróleo);
- estruturas navais (navios);
- "raisers", cabos, emissários e tubulações no oceano.

### 2. Construções na água

- estruturas de: portos, piers, dolphins, molhes;

- ação das correntes e sismos;
- efeitos da água sobre pilares;
- barragens e eclusas;
- canais e escoamento em tubulações;
- edificações sub-aquáticas.

### 3. Ação de ventos sobre estruturas

- edifícios altos, torres e chaminés;
- cabos aéreos, pontes pênsil

### 4. Setor militar

- mísseis e projéteis no ar e água;
- explosões em ambientes confinados;
- submarinos;
- carros de combate.

### 5. Bio-mecânica

- escoamento em vasos e artérias;
- remoção de cálculos biliares e renais;
- pressões nas artérias e câmaras cardíacas;
- interação líquido amniótico-feto.

### 6. Setor energético

- mecanismos de utilização da energia das ondas, dos ventos e marés;

- bombas e turbinas.

## 7. Reator nuclear

- escoamento do líquido refrigerante sobre as barras de combustíveis nucleares;
- chicoteamento em tubulações.

## 8. Aerodinâmica

- veículos aéreos, terrestres e espaciais.

## 9. Líquido em vasos

- fluidos armazenados em tanques;
- vasos de pressão;
- reservatórios.

### 1.7 - OBJETIVOS DO TRABALHO

Entre os mais diferentes aspectos, que poderiam ser perseguidos na área em questão, os objetivos abaixo citados se constituíram nos fundamentos que nortearam o presente trabalho:

- 1) O interesse do autor nos estudos da interação fluido - estrutura, procurando com isto o engajamento e a familiarização na área, bem como, a compreensão do mecanismo físico existente nesta inter-relação, entendendo ser esta a única forma possível de investigações neste campo, visando a continuidade de estudos mais avançados e/ou as futuras pesquisas;
- 2) A intenção de desenvolver o ensino e a pesquisa nesta área,

ao retornar à instituição de origem, a Fundação Universidade do Rio Grande -FURG- onde o vento e a água se constituem na vocação natural e por excelência desta universidade;

- 3) Proporcionar um conteúdo sistematizado de tal forma que, sem perder as características de didática e continuidade pudessem proporcionar, a futuros colegas, engenheiros civis estruturais, que quisessem ingressar na área, um trabalho mais ameno, e que discutisse e esclarecesse pontos de relevância na compreensão física do fenômeno, evitando com isto um longo e penoso caminho, destinado a perseguição do substancial, tantas vezes confuso, diversificado, subjetivo e quase irreal, difundido na literatura; e evitando com isso a rude peregrinação, que o autor vivenciou;
- 4) Dentro da grande área apresentada, escolher uma aplicação que não fugisse do problema original, e pudesse representar alguma contribuição a um tema de relevância nacional;
- 5) Que o conteúdo didático, o grande número de ilustrações, as comparações, os limites apresentados, as referências bibliográficas, a exploração exaustiva de certos parâmetros significativos, e os resultados, proporcionassem além da compreensão física, mais segurança nas escolhas e decisões;
- 6) Sem ser um evangelizador, é intenção do autor que este trabalho sirva também de arauto a investigações mais efetivas na área de interação-fluido-estrutura, ou seja no campo da fluídoelasticidade, ou ainda desmembradamente, da hidro-elasticidade e aeroelasticidade, os quais sem sombra de dúvidas conduzirão a resultados práticos surpreendentes.

## 1.8 - JUSTIFICATIVAS

Como foi visto no item Uma Situação, as medidas citadas visando sanar o impasse criado pela crise de energia, englobam muitas das aplicações anteriormente apresentadas; e em

coerência com a orientação perseguida neste trabalho, se constituem tipicamente em problemas de interação fluido-estrutura.

Na tentativa de economizar energia nos sistemas que consomem energia; buscar novas fontes alternativas, ou mesmo em aplicações que indiretamente revertam em economias, ou mesmo na exploração de outras modalidades não convencionais, a Engenharia se depara com um problema de otimização, em que o binômio segurança versus economia é procurado.

Todos os processos da vida moderna estão inter-relacionados e conduzem inevitavelmente a utilização de energia.

Não é suficiente diminuir o consumo de energia, é importante conhecer profundamente a natureza física do problema, suas causas, efeitos e conseqüências, para que então, de posse do domínio global do fenômeno, se possa ter com segurança o máximo de economia.

Em outras palavras, é através da pesquisa, de estudo, da experiência e da análise profunda do problema em questão, que surge a condição segura de correlacionar a expectativa de projeto com a realidade física.

Este conhecimento, quase sempre redundando em apreciáveis economias; pois joga-se fora muito dinheiro pela introdução de sucessivos gastos provenientes do super dimensionamento dos sistemas, ocasionados pelo desconhecimento íntimo da questão.

Como exemplo, pode-se citar o fato de que muito combustível poderia ser economizado, não pelo racionamento ou uma utilização racional, mas sim por uma utilização de veículos mais aerodinâmicos, onde o estudo da interação fluido-estrutura conduziria a resultados favoráveis. Um outro caso é a exagerada segurança que deve ser dada às estruturas "off shore", devido ao desconhecimento e a quantificação da natureza física glog

bal do problema envolvido que se estudado e pesquisado poderiam reverter em milhares de dólares de economia. Ou mesmo em outras áreas, em que se poderia, através do desenvolvimento de tecnologias nacionais, economizar divisas. É portanto imprescindível, a investigação nesta área de grande abrangência, num momento oportuno e numa ocasião em que o Brasil tanto tem a exigir.

### 1.9 - QUESTÕES A INVESTIGAR

Em virtude das dimensões do campo da aplicabilidade do problema interação-fluido-estrutura, que possui uma elevada abrangência, como foi visto, convém por uma questão de caracterização precisa dos casos a serem estudados, eleger certas aplicações, que se julgaram de real interesse, e que serão por certo representativas do problema original.

Entre estas, citam-se:

- estruturas "off shore" (plataforma de exploração de petróleo no mar - tipo gravidade);
- torres no mar.

### 1.10 - A INTER-RELAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Entre tantos casos, em que esta inter-relação pode ser observada, é facilmente perceptível: o efeito do escoamento de fluidos ao redor de estruturas. O surgimento de certas conseqüências ocasionadas pela vibração de alguns instrumentos musicais, cujos registros se guardam na própria história, como foi o caso bíblico da destruição das muralhas de Jericó pelo tocar de trombetas.

Folhas são arrancadas pelo vento, tufões ceifam verdadeiras cidades; plataformas "off-shore", também podem ser destruídas pela ação dos oceanos. O sódio líquido que refrige



ra o núcleo de um reator, pode quebrar e precipitar a fundição no centro deste.

Estas excitações provocadas pelo escoamento de fluidos tem se mostrado muito importantes nos últimos anos, pois os materiais estão sendo usados nos seus limites, e com isso, as estruturas têm se tornado mais leves e flexíveis. Por vezes tem sido necessário criar-se palavras ou denominações estranhas, para caracterizar certos efeitos, como por exemplo, o "*Galloping*" (galopeamento), efeito característico em linhas de transmissão envolvida pelo gelo, onde o perfil da seção pode se assemelhar a um perfil de aerofólio. Cabos submarinos que suspendem hidrofones, provocam o mau funcionamento destes. Tubos de trocadores de calor giram rapidamente em órbitas ovais, para velocidades do fluxo acima da velocidade crítica.

Tubulações experimentam deflexões causadas pela passagem de um fluxo acelerado ("*watter hammer*"), escoamentos d'água em altas velocidades, quando interrompidos abruptamente, provocam o nosso conhecido golpe-de-Ariete; ou então em um sistema de alta pressão, a ruptura causada num tubo por falhas no mesmo, faz com que o fluido esguichado exerça uma reação impulsiva sobre o tubo encurvado, podendo provocar o chamado "*pipe whip*".

Ondas d'água, que se projetam contra quebra-marés ou certas estruturas marítimas, originam uma ação chamada de golpeamento ("*buffeting*").

Ruídos podem ser produzidos pelo desprendimento de vórtices, criando influências adicionais no caso de fluxos em torno de objetos.

Cada uma destas vibrações nascem de mecanismos da dinâmica dos fluidos, distintamente diferentes; todavia, são suficientes para mostrar algumas ocorrências, e a importância da inter-relação fluido-estruturas.

### 1.11 - A INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA, E OUTROS CAMPOS DA MESMA CIÊNCIA

O problema interação fluido-estrutura, é na verdade muito complexo, em especial, pelo número de variáveis intervenientes. Muitas tentativas têm sido feitas, com a intenção de se desenvolver um ponto de vista unificado para o assunto, tal como o trabalho de Toebe<sup>167</sup>].

Dentro desta grande área, por exemplo, a aerelasticidade se caracteriza por um ramo da ciência que se preocupa no estudo das forças aerodinâmicas e seus efeitos sobre estruturas elásticas. Estes estudos iniciaram na década de vinte (1920) e hoje parecem já possuir um estágio de maturidade.

A bem pouco, o termo hidro-elasticidade foi introduzido; e está relacionado aos efeitos das forças hidrodinâmicas sobre estruturas elásticas. Em contraste com a aeroelasticidade, este último tem mostrado pouca unidade analítica, e versado sobre coisas aparentemente não relacionadas.

Uma diferença entre a aeroelasticidade e a hidroelasticidade, além da sugerida pelo próprio nome, em virtude da propriedade dos fluidos, é antes, histórica, do que lógica. E apesar destas indiferenças, ambas estão associadas ao envolvimento de fluidos e estruturas, daí pois, uma razão suficientemente forte, para denominar-se estes dois campos, já que englobam a chamada interação fluido-estrutura, por um único termo, *Fluidoelasticidade*, que por certo permitirá uma coerência na investigação das características físicas e analíticas do problema.

Contudo, o termo fluidoelasticidade possui limites e limitações definidas e poderá, sobre certo ponto de vista, denotar apenas os fenômenos, em que o efeito de deformação da estrutura ocorre e/ou propriedades do fluido são alteradas. Isto é, envolve casos em que uma independência se desenvolve entre as forças dinâmicas do fluido atuando sobre a estrutura e

as forças elásticas e/ou de inércia, são mobilizadas na estrutura, todavia uma interação, ao nível que seja, sempre ocorrerá.

Muitos efeitos fluídoelásticos se manifestam com características próprias: algumas úteis, outras prejudiciais, e as considerações que envolvem os conhecimentos sobre estes efeitos, versam sobre cinco áreas: teoria da elasticidade - mecânica das estruturas - dinâmica das estruturas - mecânica dos fluidos e processos aleatórios.

Para análise do verdadeiro problema acoplado, uma das formas mais efetivas, consiste por assim dizer, na determinação dos chamados operadores estruturais, operadores dinâmicos, e operadores fluído-dinâmicos <sup>[167]</sup>.

O tratamento unificado dos fenômenos em questão, representam uma tentativa de caracterizar da mesma forma, efeitos que a priori parecem distintos.

#### 1.11.1 - Aeroelasticidade

Desde que o termo aeroelasticidade se consagrou, há uns 20 anos, esta disciplina tem proporcionado investigações na área de mecânica aplicada, tendo se preocupado quase que exclusivamente com o projeto de estruturas, destinadas a artefatos submetidos a altas velocidades. Porém, hoje, já num estágio de maturidade, as atenções se voltam ao campo da interação entre fluidos e sólidos elásticos. Embora existindo uma significativa união recíproca entre as forças do fluído agindo contra a interface, resultando numa deformação elástica, ainda se procura uma definição adequada para este fim. E isto é inegavelmente uma fonte de pesquisas, que prometem resultados encorajadores. Esta fonte promissora, e ávida de soluções, deve-se entre outras causas, à natureza não conservativa das forças que afetam a estabilidade aeroelástica; que tem suscitado várias disputas no campo da matemática aplicada, e das equações diferenciais; pois se tem tido dificuldades de modelar muitos parâme

tros sistemáticos, as condições de contorno nem sempre atendidas, além da dificuldade de reproduções em resultados experimentais.

Há motivações práticas para muitos casos e a maior parte do progresso se origina da necessidade de estruturas mais leves e muito flexíveis; e a pressão dinâmica cada vez mais atuante, na crescente ativação de veículos atmosféricos, cruzadores, foguetes ou projéteis tipo balísticos. O comportamento aeroplástico <sup>2</sup> | é também encontrado em navios, pontes, estacas de metal, palhetas em dispositivos trocadores de calor, e outros tantos projetos de engenharia. Porém, a aeronáutica tem fornecido o maior estímulo.

Muitos trabalhos têm sido publicados, após o original de Gossman na Rússia, e Scaulan e Rosenbaum em inglês. Há também algumas monografias como as de Miles e Landahl.

De posse da literatura básica, e da que hoje se divulga, muitos autores dão crédito e melhoram as descrições, que vão dando pequenos desenvolvimentos, mas que parecem sustentar grandes promessas. Enfim, o "*estado da arte*", demonstra que muitos destes desenvolvimentos são pouco conhecidos, outros, um potencial não totalmente reconhecido e, por último, alguns representam um campo obscuro.

### 1.11.2 - Hidroelasticidade

O campo da hidroelasticidade tem características comuns com o da Aeroelasticidade, e se refere ao estudo do fenômeno envolvendo interações mútuas entre forças de inércia, elásticas, e fluido dinâmicas agindo sobre componentes estruturais imersas, ou que contenham líquidos. Inicialmente, o uso deste termo denotava certos tipos de interação fluido-estrutura, especialmente os ligados aos domínios da Arquitetura Naval e a Engenharia Marinha <sup>1</sup> |. Anteriormente era caracterizado por uma grande classe de problemas relativos a radiação de sons gerados

pela estrutura, para o meio fluido envolvente; assim como, a geração de som na estrutura, pelo movimento entre a estrutura e o fluido. Um mais recente e vasto uso é referido mais especificamente à classe de problemas associados com embarcações navais, e outros veículos marinhos, que conduzem a distintas e fechadas relações, já respondidas no fenômeno de estabilidade longamente associado aos veículos aéreos. Foi nítido e evidente, que muitos outros problemas de grande interesse, como o da arquitetura naval e a engenharia marinha se viram dentro da nova hidroelasticidade, como por exemplo, a vibração de cascos de navio introduzidas pela ação de certos artefatos e anexos (leme, âncoras propulsores, periscópio submarino, etc...). Isto leva rapidamente à classificação dos possíveis problemas hidroelásticos, como derivados de considerações correspondentes ao problema aeroelástico, no campo da engenharia aeronáutica.

Grande parte dos problemas hidroelásticos derivam mais ou menos de considerações semelhantes de problemas aeroelásticos; e por isso, herdam uma vasta experiência e conhecimentos. De fato, se não fosse a existência de quatro grandes fatores, todo o conhecimento sobre aeroelasticidade poderia ser aplicada em hidroelasticidade. O primeiro deles, como é evidente, é a existência de uma superfície líquida livre. Esta interface leva não só apenas as complexidades nascidas das ações dinâmicas, que sempre tem lugar, mas também porque, o ar é um fluido de pouco peso. Ele pode envolver um corpo móvel, como permitir a formação de grandes bolhas de vapor no líquido, provocando os chamados efeitos de cavitação. A cavitação é na verdade o segundo maior problema. Também, massas relativas da estrutura e do fluido imediatamente envolvente estão geralmente longe do domínio da experiência aeronáutica; mas apesar dos efeitos da superfície livre e da cavitação, este último fator ainda pode ser enquadrado nas concepções da aeroelasticidade. E finalmente, se tem o problema da compressibilidade do ar.

As conseqüências destas similaridades e das diferenças entre os dois campos, faz com que a hidroelasticidade parece por vezes incompleta, porque um número pequeno, mas importante de questões ainda não foram respondidas adequadamente.

## 1.12 - HIPÓTESES, PRESSUPOSTOS E CONSIDERAÇÕES

Dada a dimensão do problema interação fluido-estrutura, ensaiado nas seções anteriores, e evidenciado o grau de complexidade pelo número de fatores intervenientes, tornar-se-ia impraticável qualquer aplicação, se um número grande de suposições não fossem efetuados.

Os estudos desenvolvidos e aplicados no presente trabalho, do campo da interação fluido-estrutura, restringe-se exclusivamente às estruturas no mar, e obedecem às condições abaixo prescritas:

### 1.12-1 - Restrições

- estruturas cilíndricas circulares vazadas ou cheias; fixas no fundo pela extremidade inferior;
- inércia constante, e se variável, de grande suavidade;
- estruturas não totalmente submersas;
- é usado o Processo da Onda de Projeto;
- as águas são profundas;
- as únicas solicitações presentes são os pesos e as cargas de onda;
- o modelo estrutural é discreto e com comportamento de viga.

### 1.12-2 - Suposições

- ondas de caracter harmônico (senoidais);
- ondas de pequenas amplitudes (relação altura

comprimento muito pequeno);

- fundo fixo e horizontal;
- estrutura rígida;
- os membros das estruturas são suficientemente espaçados, de modo que um não influencia o outro;
- não se questionam certos detalhes de construção, transporte e assentamento;
- a existência de certos efeitos paralelos e secundários, como desprendimento de vórtices, ruídos causados por estes, ou pelo atrito entre o fluido e a estrutura; para as condições usadas, ainda que significativas não serão considerados;
- a força de sustentação e outros mecanismos de instabilidade não serão reconhecidos;
- as estruturas poderão ou não conter líquidos no seu interior;
- todas as condições e o problema em questão serão lineares;
- a interação será quantificada pela existência e magnitude das forças; todavia, sem o efeito de interdependência atualizado.

Não serão considerados:

- efeito de interação solo-estrutura;
- ação de correntes, ventos e sismos;
- as variações de dimensões e rugosidade da superfície da estrutura.

Atendidas as condições acima descritas, dir-se-á que presente se está, de um Problema de Interação Fluido-Estrutura Simplificado (PIFES).



## CAPÍTULO II

### TEORIA LINEAR DE ONDAS DE PEQUENAS AMPLITUDES

#### II.1-2) - INTRODUÇÃO

A primeira vista, como resultado da observação, a superfície do mar parece um conjunto desordenado de elevações e vales, se distribuindo caoticamente em toda a extensão.

Todavia, de uma observação mais criteriosa, onde se separa os efeitos localizados e de pequena importância, se poderia enxergar uma certa regra neste fenômeno, aparentemente sem ordem.

E, em busca de leis re rejam o comportamento do fenômeno, e que possam expressar, mais realisticamente possível o problema, é que foi o motivo das muitas teorias de ondas, que hoje se conhece.

Em geral, o fenômeno das ondas d'água são complexos e difíceis de serem descritos matematicamente, por causa das não linearidades, pelo caráter tridimensional e pelo aparente comportamento aleatório.

Na tentativa de compreender e descrever o fenômeno da onda, são apresentados neste Capítulo, certas suposições que caracterizam o problema essencial e simplificam a questão; ao mesmo tempo, que se discorre sobre considerações importantes para o atendimento do meio fluido, até a obtenção da clássica teoria de Airy.

Posteriormente, são feitos alguns comentários sobre as teorias mais usadas, suas validades e discrepâncias.

Excelentes descrições sobre teorias de onda poderão ser encontradas em [142], [169], [109], [84], [68], [180].

## 11.1-2 - EQUAÇÕES BÁSICAS E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA HIDRODINÂMICO

Supondo um fluido em movimento, e conhecidas as forças externas que atuam sobre ele, o problema hidrodinâmico a ser resolvido será a determinação do movimento dos diversos pontos do espaço que constitui o fluido, e o seu campo de pressões.

Seja o movimento definido em relação ao sistema de coordenadas mostrados na gravura abaixo, em que se busca uma formulação matemática que expresse o comportamento do fenômeno.

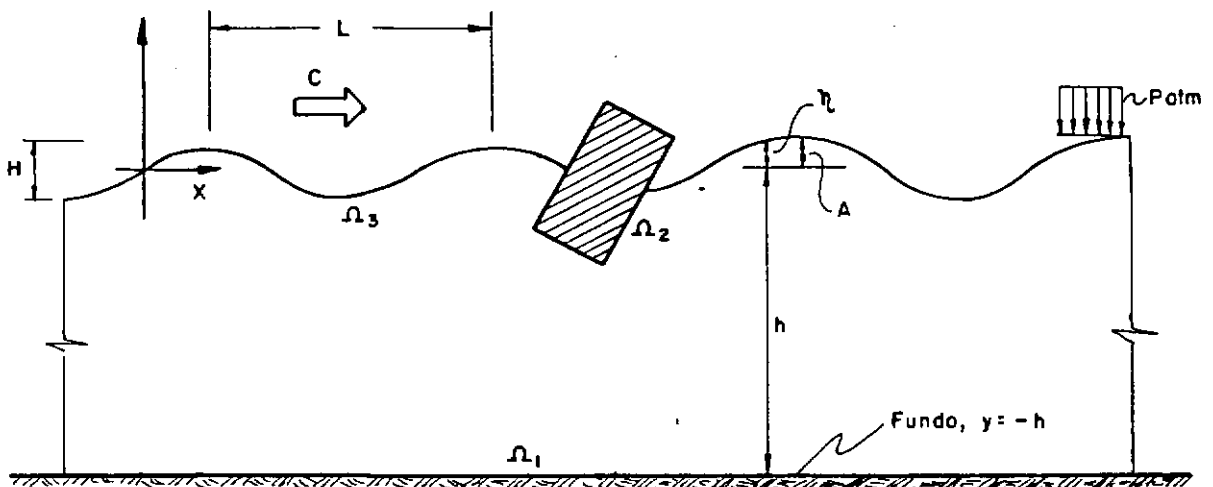


FIG. II.12 - Definição dos elementos.

O estudo é baseado na teoria potencial, e por conseguinte, admitem-se as considerações

- i ) O fluido é homogêneo: e incompressível

$$\rho = \text{constante}$$

$$\text{div } \underline{V} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11.1-1)$$

ii) O movimento é irrotacional

$$\underline{w} = \text{rot } \underline{V} = \nabla \times V = 0 \quad (11.1-2)$$

Esta relação representa uma condição necessária e suficiente de potencialidade de um campo de velocidade, isto é, da existência de uma função escalar  $\phi(x, y, z, t)$  - potencial de velocidade, tal que

$$\underline{V} = \text{Grad. } \phi = \nabla \phi \quad (11.1-3)$$

Levando-se (11.2-3) em (11.2-1) chega-se

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (11.1-4)$$

$\nabla^2 \phi = 0$  é condição a ser atendida em todo o domínio do fluido ( $\Omega$ )

iii) a pressão na superfície livre é uniforme e constante;

iv) as tensões na superfície podem ser negligenciadas;

v) o fluido é ideal (sem viscosidade);

vi) o fundo é horizontal, fixo, e impermeável; o que implica que a velocidade no fundo é zero;

vii) as ondas são de pequena amplitude, (em relação ao comprimento de onda  $L$ ), e sua forma invariável no tempo e no espaço.

ix) as ondas são planas ou de cristas longas (bi-dimensionais).

Por outro lado, a equação que descreve o movimento dos fluidos não viscosos é:

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) \underline{V} = -\frac{1}{\rho} \text{Grad. } P + \underline{F} \quad (11.1-5)$$

Como (11.1-1) e (11.1-5) são absolutamente gerais, necessita-se impor certas condições complementares para garantir a unicidade da solução, condições estas apresentadas a seguir.

Supondo que o fluido esteja submetido a um campo de forças conservativas, isto é, a força  $\underline{F}$  advém de um potencial  $U$  :

$$\underline{F} = \text{Grad } U \quad (11.1-6)$$

como

$$(\underline{V} \times \Delta) \underline{V} = \left| \underline{w} \times \underline{V} \right| + \text{grad. } \frac{V^2}{2} \quad (11.1-7)$$

e, efetuando-se as devidas substituições em (11.2-5)

chega-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left| \Delta \phi \right|^2 \right] + \frac{P}{\rho} + U = \phi(t) \quad (11.1-8)$$

Equação (11.1-5) modificada, que representa uma condição dinâmica.

Supondo-se o escoamento permanente, isto é, o campo de velocidade independente do Tempo, chega-se a

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^2 + \frac{P}{\rho} + U = C = \text{constante} \quad (11.1-9)$$

equação de Bernoulli., válida em todo o domínio (ID).

### 11.1-3 - ESTUDO DO PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

A resolução do problema hidrodinâmico assim apresentado conduz à pesquisa da solução da equação  $\nabla^2 \phi = 0$ , que deverá satisfazer certas condições suplementares, que traduzam precisamente um problema específico.

#### 11.1-3-1 - Condições Iniciais

Ocorrem nos escoamentos não permanentes; e consistem num certo instante inicial ( $t = 0$ ) do domínio  $D_0$  ocupado pelo fluido; numa distribuição de potencial sobre este domínio.

$$\phi(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

#### 11.1-3-2 - Condições de Contorno

São determinadas a partir das condições de contorno sobre a fronteira  $\Omega$  do domínio de escoamento  $D$ , para todo instante  $t \geq 0$ .

Seja contorno  $\Omega$  dividido em três partes:

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \quad (\text{Vide Figura 11.1-1})$$

Seja  $S(x, y, z, t) = 0$  (11.1-10) a equação da superfície de um contorno impermeável genérico. Para que em  $S = 0$  as partículas do fluido se encontrem em  $S = 0$ , é necessário que as partículas e a superfície tenham movimentos afins

$$S(x_p(t), y_p(t), z_p(t), t) = 0, \quad \forall t$$

a condição que expressa o fato do fluido permanecer sobre o contorno é dita condição cinemática da superfície do contorno:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u_x \frac{\partial S}{\partial x} + u_y \frac{\partial S}{\partial y} + u_z \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (11.1-11)$$

ou,

$$S = 0 \quad u = \text{velocidade do contorno}$$

$$\therefore u_n = - \frac{\partial S / \partial t}{|\nabla S|} \quad u_n = \text{velocidade de descolamento do contorno na direção de sua normal} \quad (11.1-12)$$

$\nabla S$  é um vetor perpendicular a  $S$ .

e,

$$\hat{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \quad \text{vetor normal ao contorno.} \quad (11.1-13)$$

Por outro lado:

$$V_n = V \cdot n = V_x n_x + V_y n_y + V_z n_z \quad (11.1-14)$$

$$\therefore V_n = \nabla \phi \cdot \hat{n} = - \frac{\partial S}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\nabla S|}$$

Comparando com (11.2-12) tem-se:

$$V_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \hat{n} = u_n \quad (11.1-15)$$

condição cinemática, que pode ser traduzida como: a componente

normal da velocidade de um ponto qualquer da superfície do contorno, num instante qualquer, possui mesmo valor da componente normal da velocidade da partícula fluida, que neste instante esteja em contato com o ponto na superfície.

Portanto esta conclusão, também indica que para todo  $(x, y, z)$  e  $t$  verifica-se (11.1-10) onde  $S$  atende a relação

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\Delta \phi \cdot \Delta S) = 0 \quad (11.1-16)$$

11.1-3.2-1 - No fundo:

$$(\nabla \phi \cdot \nabla S) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (11.1-17)$$

para o fundo horizontal

$$v \Big|_{y=-h} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \quad (11.1-18)$$

11.1-3.2-2 - Superfície Livre

A forma desta será:

$$S = \eta(x, t) - y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \eta(x, t) \quad (11.1-19)$$

pelas condições cinemáticas, a partícula de fluido e a superfície tem a propriedade de satisfazer (11.1-19) para qualquer tempo

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \quad (11.1-20)$$

Levando-se a equação (II.1-19) na equação (II.1-20), tem-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1-21})$$

como

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

logo

$$\frac{dy}{dt} = v|_{y=\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial y} |_{y=\eta} = v \quad (\text{II.1-22})$$

Então, a equação da superfície livre será:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad y = \eta(x, t) \quad (\text{II.1-23})$$

que é a condição cinemática na superfície livre.

Para avaliação de (II.1-23) uma condição auxiliar deve ser procurada. E será expressa pelo acoplamento das condições dinâmicas e cinemáticas. A condição dinâmica se traduz pela igualdade de pressões na superfície do fluido e a pressão atmosférica. ( $p = p_{atm}$ )

Da equação (II.1-8) se tem:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\Delta \phi)^2 - g\eta = 0, \quad y = \eta(x, t) \quad (\text{II.1-24})$$

#### II.2-4 - LINEARIZAÇÃO DO PROBLEMA

Observa-se que (II.1-23) e (II.1-24) envolvem



como incógnitas  $\phi$  e  $\eta$ , além de possuírem termos não lineares.

Se o movimento é lento, o termo de segunda ordem de (11.1-24), pode ser desprezado em relação aos outros dois termos; e a condição de contorno aplicada a superfície livre deverá ser aplicada em  $y = 0$ ;

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} \quad (11.1-25)$$

fisicamente esta linearização supõe que o fluxo seja muito vago-  
roso, onde a energia cinética das partículas são muito menores  
que as outras energias mecânicas.

Se em (11.1-23) a inclinação da superfície li-  
vre ( $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ ) e/ou  $v$  é pequeno, pode-se desprezar estes termos,  
chegando-se à:

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \partial \eta / \partial t, \quad y = \eta \quad (11.1-26)$$

ou em termo de  $\phi$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad y = \eta \quad (11.1-27)$$

Expandindo em série de Taylor

$$\phi \Big|_{y=\eta} = \phi \Big|_{y=0} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} + O(\eta^2) \quad (11.1-28)$$

para pequenas perturbações (pequenos  $\eta$  e/ou  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ )

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad y = 0 \quad (11.1-29)$$

logo  $\eta$  pode ser eliminado pela utilização simultânea das condições de contorno cinemáticas e dinâmicas linearizadas.

Isto é, levando-se (II.1-25) em (II.1-29):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad y = 0 \quad (\text{II.1-30})$$

## II.2-5 - RESOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO

Seja o problema de valor de contorno definido a seguir, onde a função potencial  $\phi$  deve atender às seguintes condições:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{em } D \quad (\text{II.1-31})$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{em } y = -h \quad (\text{II.1-32})$$

$$\phi_{tt} + g \phi_y = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (\text{II.1-33})$$

Usando-se o método de separação de variáveis chega-se a:

$$\phi(x, y, t) = x(x) Y(y) T(t) = X \cdot Y \cdot T \quad (\text{II.1-34})$$

Substituindo-se  $\phi$  no laplaciano vem:

$$\frac{Y''}{Y} = - \frac{X''}{X} = K^2 \quad (\text{II.1-35})$$

ou

$$Y'' - K^2 Y = 0 \quad (\text{II.1-36})$$

$$X'' + K^2 X = 0 \quad (\text{II.1-36a})$$

Resolvendo a equação (11.1-36) tem-se:

$$Y(y) = A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} \quad (11.1-37)$$

Aplicando-se a condição (11.1-32):

$$\frac{dy(y)}{dy} = K A_1 e^{-kh} - K A_2 e^{kh} = 0 \quad \therefore \quad K A_1 e^{-kh} - K A_2 e^{kh} = 0$$

$$A_1 e^{-kh} = A_2 e^{kh} = \frac{A_3}{2}$$

que resulta:

$$Y(y) = A_3 \cosh [k(y+h)] \quad (11.1-38)$$

E a função  $\phi$  torna-se:

$$\phi(x, y, t) = X(x) T(t) A_3 \cosh [K(y+h)] \quad (11.1-39)$$

Levando-na na condição (11.1-33) para  $y = 0$  se chega:

$$T'' X A_3 \cosh [K(y+h)] + g T X A_3 K \sinh [K(y+h)] = 0$$

$$\therefore \quad \frac{T''}{T} = -g K \tanh (kh) \quad (11.1-40)$$

como  $\frac{T''}{T}$  não depende de  $y$ , conclui-se que esta relação é constante para qualquer  $y$ .

logo,

$$\omega^2 = g K \tanh (kh) \quad (11.1-41)$$

como

$$-\frac{T''}{T} = \text{constante} = \omega^2 \quad \therefore \quad T'' + \omega^2 T = 0 \quad (11.1-42)$$

cuja solução será:

$$T(t) = A_4 e^{i\omega t} + A_5 e^{-i\omega t}$$

como o fator tempo  $e^{i\omega t}$  melhor descreve o problema, tem-se:

$$T(t) = A_4 e^{i\omega t} \quad (11.1-43)$$

Observa-se que  $T(t)$  é uma função periódica de período  $\tau$  e frequência  $\omega = 2\pi/\tau$

Levando-se (11.1-43) e (11.1-38) em (11.1-34) chega-se:

$$(x, y, t) = X_{(x)} A_3 \cosh k(y+h) e^{i\omega t} \quad (11.1-43)$$

Introduzindo-se esta na condição (11.2-25) em  $y = 0$ , vem:

$$-g \cdot \eta = X_{(x)} A_3 \cosh [k(y+h)] i\omega e^{i\omega t} \quad (11.1-44)$$

para  $y = 0$ :

$$X(x) \cdot A_3 \cdot \cosh |kh| i\omega e^{i\omega t} = -g\eta \quad (11.1-45)$$

com o auxílio da identidade de Euler, ter-se-á:

$$X(x) A_3 \cosh (kh) i\omega \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (11.1-46)$$

Retornando  $\tilde{a}$  (11.1-57):

$$X'' + K X = 0$$

Tem-se a solução:

$$X(x) = A_6 e^{ikx} + A_7 e^{-ikx},$$

que por conveniência se toma,

$$X(x) = A_7 e^{-ikx} \quad (11.1-47)$$

$X(x)$  também é periódica, e sugere a  $k$  uma interpretação semelhante a  $\omega$ .

Levando em (11.1-45) e isolando  $\eta$  obtem-se:

$$\eta = - \frac{A_3}{g} \omega \cosh(kh) i e^{i(-kx + \omega t)} \quad (11.1-48)$$

a constante  $A_7$  se incluirá em  $A_3$ .

Recorrendo-se à identidade de Euler se chega,

$$\eta = - \frac{A_3}{g} \cosh(kh) \left[ \cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx) \right] \quad (11.1-49)$$

Esta equação é usada para se determinar a máxima elevação da superfície livre ( $A$ ), isto é,

$$\eta = A \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad t = 0$$

donde se chega:

$$A = \frac{A_3 \omega}{g} \cosh(kh) \quad (11.1-50)$$

e desta se tira a constante  $A_3$ ,

$$A_3 = \frac{A \cdot g}{\cosh(kh)} \quad (11.1-51)$$

constante que substituindo em (II.1-43) juntamente com (II.1-47) resulta:

$$\phi(x, y, t) = \frac{A g}{\omega} \frac{\cosh[k(y + h)]}{\cosh(kh)} e^{-(kx - \omega t)} \quad (\text{II.1-52})$$

Trabalhando-se mais a expressão, reduz-se:

$$\phi(x, y, t) = \frac{A g}{\omega} \frac{\cosh[k(y + h)] \cos(kx - \omega t)}{\cosh(kh)} \quad (\text{II.1-53})$$

E representa uma onda progressiva se movendo na direção (x) positiva.

Levando-se (II.1-53) em (II.1-25) obtêm-se a equação do perfil da onda

$$\eta = - \frac{1}{g} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{y=0} = -A \sin(kx - \omega t) \quad (\text{II.1-54})$$

periódica em x e t.

Se um ponto virtual é identificado sobre a superfície livre, e se move com a onda, tal que sua posição relativa a onda permanece fixa, então

$$(kx - \omega t) = \text{constante} \quad (\text{II.1-55})$$

a velocidade com que este ponto deve se mover para acompanhar o deslocamento da onda será:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{\tau} = c \quad (\text{II.1-56})$$

Significando que este ponto virtual se move na direção x com a velocidade de propagação da onda

$C$  = celeridade da onda (Vide Fig. 11-12)

Levando-se (11.1-41) em (11.1-56) se chega:

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \quad (11.1-57)$$

ou,

$$L = \frac{g\tau^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (11.1-58)$$

## 11.1-6 - DETERMINAÇÃO DOS CAMPOS CINEMÁTICOS

### 11.1-6.1 - Velocidades e Acelerações

Na equação (11.1-3) da consideração (ii) se tem:

$$\vec{V} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{j} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

Logo:

$$u = -\frac{A g k}{w} \frac{\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} \sin(kx - wt) \quad (11.1-59)$$

$$v = \frac{A g k}{w} \frac{\sinh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} \cos(kx - wt) \quad (11.1-60)$$

Por sua vez, na determinação do campo de aceleração, deve-se reportar as simplificações aplicadas ao problema de valor de contorno na seção correspondente as linearizações onde foi desprezado o termo  $\frac{1}{2}(\Delta\phi)^2$  que representa a parcela convectiva da aceleração. Para se manter esta consistência, deve-se usar unicamente termo local. Então:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = A g k \frac{\cos h \quad k (y+h)}{\cos h (k h)} \cos (kx - wt) \quad (11.1-61)$$

e

$$v = \frac{\partial v}{\partial t} = A g k \frac{\sen h \quad k (y+h)}{\cos h (k h)} \sen (kx - wt) \quad (11.1-62)$$

### 11.1-6.2 - Deslocamento das Partículas D'Água:

É sabido que as partículas d'água na onda descrevem movimentos orbitais.

Se na posição média do movimento da partícula, for considerado o centro da orbital, o deslocamento vertical desta, em relação a posição média, não poderá exceder a amplitude da onda A.

Se a altura da onda for pequena, o deslocamento de alguma partícula d'água, em relação a posição média será pequeno.

Então o campo de velocidade efetivo sobre esta partícula será dado pelas equações (11.1-59) e (11.1-60) avaliadas na posição média da partícula. (Admite-se que a órbita da partícula permanece nas proximidades do ponto inicial ( $x_0, y_0$ ))

Logo, o deslocamento horizontal ( $\xi$ ) e vertical ( $\zeta$ ) das partículas, em relação a posição média será:

$$\xi = \int u dt = \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x} dt \Big|_{x_0, y_0} = \frac{A g k}{w^2} \frac{\cos h [k(y+h)]}{\cos h (k h)} \cos (kx - wt) \quad (11.1-63)$$

$$\zeta = \int v dt = \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial y} dt \Big|_{x_0, y_0} = \frac{A g k}{w^2} \frac{\cos h [k(y+h)]}{\cos h (k h)} \sen (kw - wt) \quad (11.1-64)$$



Estas equações podem ser simplificadas com o uso da relação:

$$\omega^2 = kg \tanh(kh)$$

que conduz a:

$$\xi = A \frac{\cosh[k(y+h)]}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (11.1-65)$$

$$\zeta = A \frac{\sinh[k(y+h)]}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (11.1-66)$$

ou escritas de outra forma:

$$\cos^2(kx - \omega t) = \left[ \frac{\xi}{A} \frac{\sinh(kh)}{\cosh k(y+h)} \right]^2$$

$$\sin^2(kx - \omega t) = \left[ \frac{\zeta}{A} \frac{\sinh(kh)}{\sinh k(y+h)} \right]^2$$

que adicionadas resultam:

$$\frac{\xi^2}{\bar{A}^2} + \frac{\zeta^2}{\bar{B}^2} = 1 \quad (11.1-67)$$

onde,

$$\bar{A} = A \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh(kh)}$$

e

$$\bar{B} = A \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh(kh)}$$

A equação (11.1-67) é a equação de uma elipse com semi-eixo maior (horizontal)  $\bar{A}$  e o semi-eixo menor (vertical)  $\bar{B}$ .

Astrajetórias das partículas assim generalizadas são elípticas; todavia, para águas profundas ou rasas, deverão ser determinadas por um exame dos valores de  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ , que conduzirão a círculos ou elipses mais achatadas, cujos eixos decrescem com a profundidade.

A magnitude e distribuição dos campos cinemáticos aqui apresentados, bem como seus valores extremos e suas variações, em relação à posição do perfil da onda, são apresentados na Fig. 11-13.

### 11.2-6.3 - Equações Degeneradas, em Função da Profundidade Relativa

De acordo com a variação do parâmetro  $kh$ , que determina o comportamento das funções hiperbólicas, e representa uma condição geométrica, relacionando às dimensões da onda com a profundidade, se pode classificar as ondas em três tipos, e ao mesmo tempo obter certas simplificações.

É também usual caracterizar esta classificação, através da relação altura d'água  $h$ , comprimento da onda  $L$ , relação denominada profundidade relativa ( $h/L$ ).

#### 1º Caso - Águas Profundas

$$kh \gg 1 \quad \text{ou} \quad \frac{h}{L} > \frac{1}{2}$$

logo,

$$\tanh kh \approx 1$$

e (11. -58) se reduz a:

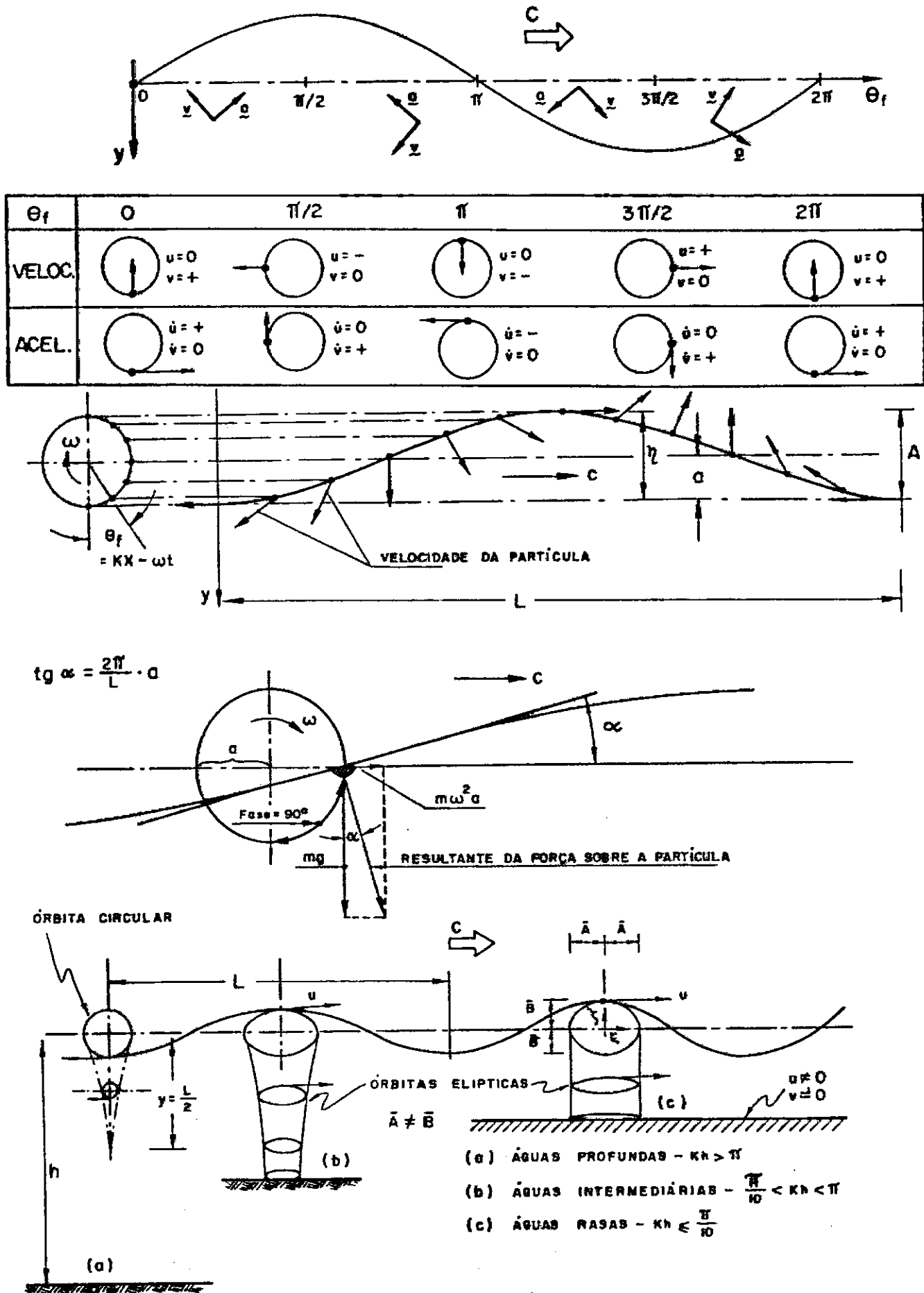


FIG. II.13 - Esquema dos campos cinemáticos das partículas do fluido da onda.

$$L = L_0 = \frac{g}{2\pi} T^2 = 1,56 T^2 \text{ (S.I.U)} \quad (11.1-68)$$

e

$$C = C_0 = \frac{g}{2\pi} T$$

Por outro lado, como:

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{\cosh k(y+h)}{\sinh(kh)} = e^{ky} \quad \text{e} \quad \lim_{kh \rightarrow \infty} \frac{\sinh k(y+h)}{\sinh(kh)} = e^{ky}$$

Tem-se as equações simplificadas:

$$\mu = -A \omega e^{k_0 y} \sin(kx - \omega t) \quad (11.1-69)$$

$$\chi = A \omega e^{k_0 y} \cos(kx - \omega t) \quad (11.1-70)$$

$$\dot{\mu} = A \omega^2 e^{k_0 y} \cos(kx - \omega t) \quad (11.1-71)$$

$$\dot{\chi} = A \omega^2 e^{k_0 y} \sin(kx - \omega t) \quad (11.1-72)$$

$$\xi = A e^{k_0 y} \cos(kx - \omega t) \quad (11.1-73)$$

$$\zeta = A e^{k_0 y} \sin(kx - \omega t) \quad (11.1-74)$$

## 2º Caso: Águas Rasas

$$kh \ll 1, \quad \frac{h}{L} < \frac{1}{120}$$

logo

$$\tanh(kh) \approx kh$$

A equação (11.1-58) se reduz a  $L = \sqrt{g \cdot h} T$

e

$$c = \sqrt{g h} \quad (11.1-75)$$

Por outro lado, sabe-se também que:

$$\lim_{kh \rightarrow 0} \sinh(kh) = kh \quad \text{e} \quad \lim_{kh \rightarrow 0} \cosh(kh) = 1$$

que conduzem às simplificações:

$$u = - \frac{Aw}{kh} \sin(Kx - wt) \quad (11.1-76)$$

$$v = Aw \left(1 + \frac{y}{h}\right) \cos(Kx - wt) \quad (11.1-77)$$

$$\dot{u} = \frac{A\omega^2}{kh} \cos(Kx - wt) \quad (11.1-78)$$

$$\dot{v} = A\omega^2 \left(1 + \frac{y}{h}\right) \sin(Kx - wt) \quad (11.1-79)$$

$$\xi = \frac{A}{kh} \cos(Kx - wt) \quad (11.1-80)$$

$$\zeta = A \left(1 + \frac{y}{h}\right) \sin(Kx - wt) \quad (11.1-81)$$

### 3º Caso: Águas Intermediárias

$$kh \approx 1, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2}$$

as equações anteriormente deduzidas e apresentadas nas suas expressões mais gerais, são aplicadas a este caso.

Os resultados mostrados nesta última seção, pode rão ser sumarizados no quadro a seguir:

$\frac{h}{L}$	$kh$	$\sin h(kh)$	$\cos h(kh)$	Tipo de Ondas
$0 - 1/20$	$0 - \pi/10$	$kh$	$e^{kh/2}$	Águas Rasas (ondas longas)
$1/20 - 1/2$	$\pi/10 - \pi$	$\sin h(kh)$	$\cos h(kh)$	Águas Intermediárias
$1/2 \rightarrow \infty$	$\pi \rightarrow \infty$	1	$e^{kh/2}$	Águas Profundas (ondas curtas)

Tabela 11.1

Classificação das ondas e suas funções aproximadas

Também se pode observar na Figura (11.13), (a), (b) e (c) a classificação das ondas, a forma das órbitas das partículas e suas variações com a profundidade.

#### 11.2-6.4 - Outras Teorias de Onda

Existe uma série grande de teorias de onda, que podem ser facilmente consultadas na vasta literatura existente sobre o assunto. Cada uma apresenta vantagens e desvantagens, bem como condições de aplicabilidade e situações que melhor se adequam.

Todavia, são de uso generalizado hoje [36] as teorias de: Airy, Stokes, Cnoidal, e "Stream-Function".

Embora se tenha apresentado neste trabalho unicamente a teoria de Airy, cujas razões, entre outras, se destaca a sua simplicidade de operação e a facilidade com que proporciona uma visão física do fenômeno; esta se constitui na base para compreensão das outras teorias.

Em virtude do número de teorias de onda, e suas recomendações específicas, o Engenheiro se depara com o problema

ma de eleger, qual a teoria mais adequada. E para superar este impasse, tem-se mostrado eficientes as regiões de validade das teorias, com seus respectivos limites conforme o quadro apresentado por Le Mehaute (1969) [109] na Figura II-14A.

Para certos valores de  $H$ ,  $h$  e  $T$ , esta figura pode ser usada como orientação na escolha da teoria apropriada; ou como verificação, se para certos dados, se está utilizando a teoria mais adequada. A grandeza do parâmetro de Ursell  $U_R$  pode ser usada para estabelecer o contorno limite, onde cada teoria em particular pode ser usada.

$$U_R = \left(\frac{H}{L}\right) \left(\frac{L}{h}\right)^3$$

Ainda como uma orientação qualitativa se apresenta o gráfico complementar abaixo:

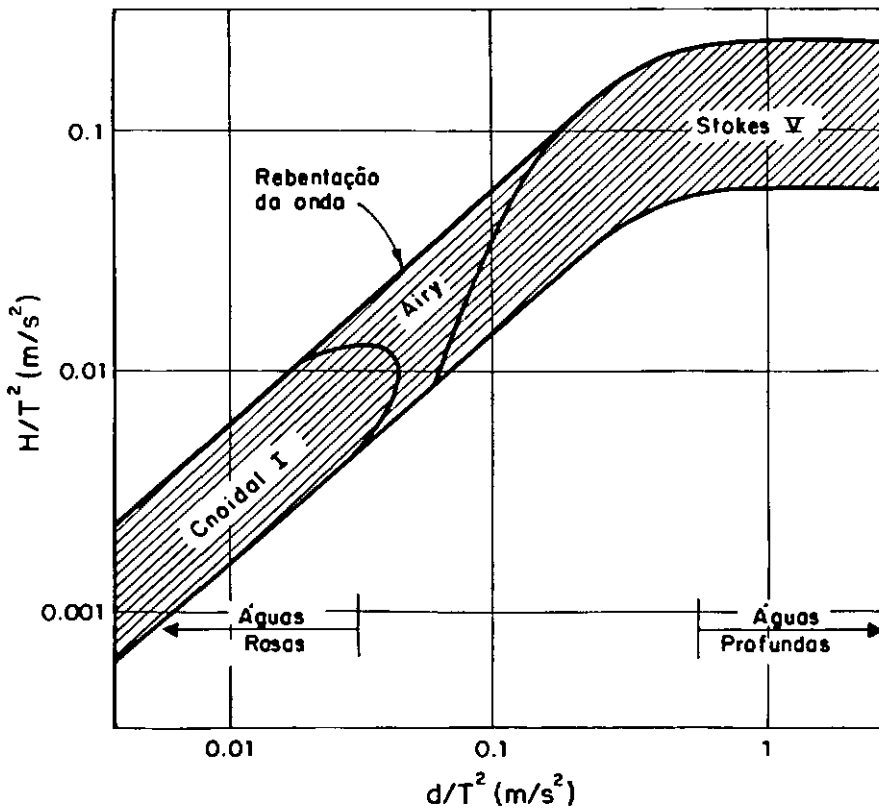


FIG. II.14 - Faixas de validade das teorias de onda.

Para teoria linear tanto a inclinação da onda,  $H/gT^2$ , como o parâmetro de Ursell, devem ser pequenos.

A observação da Figura (11-15), sugere que a teoria de Stokes V é mais adequada às águas profundas, enquanto que a Cnoidal às águas rasas.

Todavia, estas duas teorias são não lineares, e apresentam complicações, que dificultam seu uso, razão pela qual se prefere a teoria linear.

Apesar dos gráficos anteriores servirem de fortes indicadores, não existe muita concordância dos diversos autores com respeito ao campo de validade destas teorias. Contudo, as condicionantes do trabalho em questão, que prescreve uma aplicação a estruturas longe da costa, e em particular as existentes nas costas brasileiras, já não se tem necessidade de utilizar uma teoria para águas rasas; se impondo como opção, duas teorias perfeitamente adequadas ao problema, que são a teoria linear de Airy e a Teoria de Stokes de quinta ordem (Stokes V).

#### 11.2-6.5 - Comparações entre as Duas Teorias mais Utilizadas

Com o objetivo de tornar palpável as discrepâncias existentes na utilização destas duas teorias, são apresentados nas próximas tabelas e gravuras, alguns resultados obtidos no trabalho de Rivas [133] concernente ao campo cinemático das ondas<sup>(6)</sup>, atuantes sobre um cilindro vertical longo.

A discrepância destes resultados decorre da linearização das condições de contorno na superfície livre para a teoria de Airy, o que não acontece para a de Stokes V. Foram obtidos até diferenças de em torno de 40%, fato que sugere cuidados especiais na eleição da teoria de onda mais adequada.

---

(6) O exemplo ilustra, todavia parece não ser muito feliz.



Diante destas circunstâncias, e perante a uma indefinição gerada pela responsabilidade, aconselha-se recorrer aos trabalhos de Evans (1969), Dean (1970), Rao e Mohamed (1970), Ebbesmeyer (1974), Le Mehouté (1976).

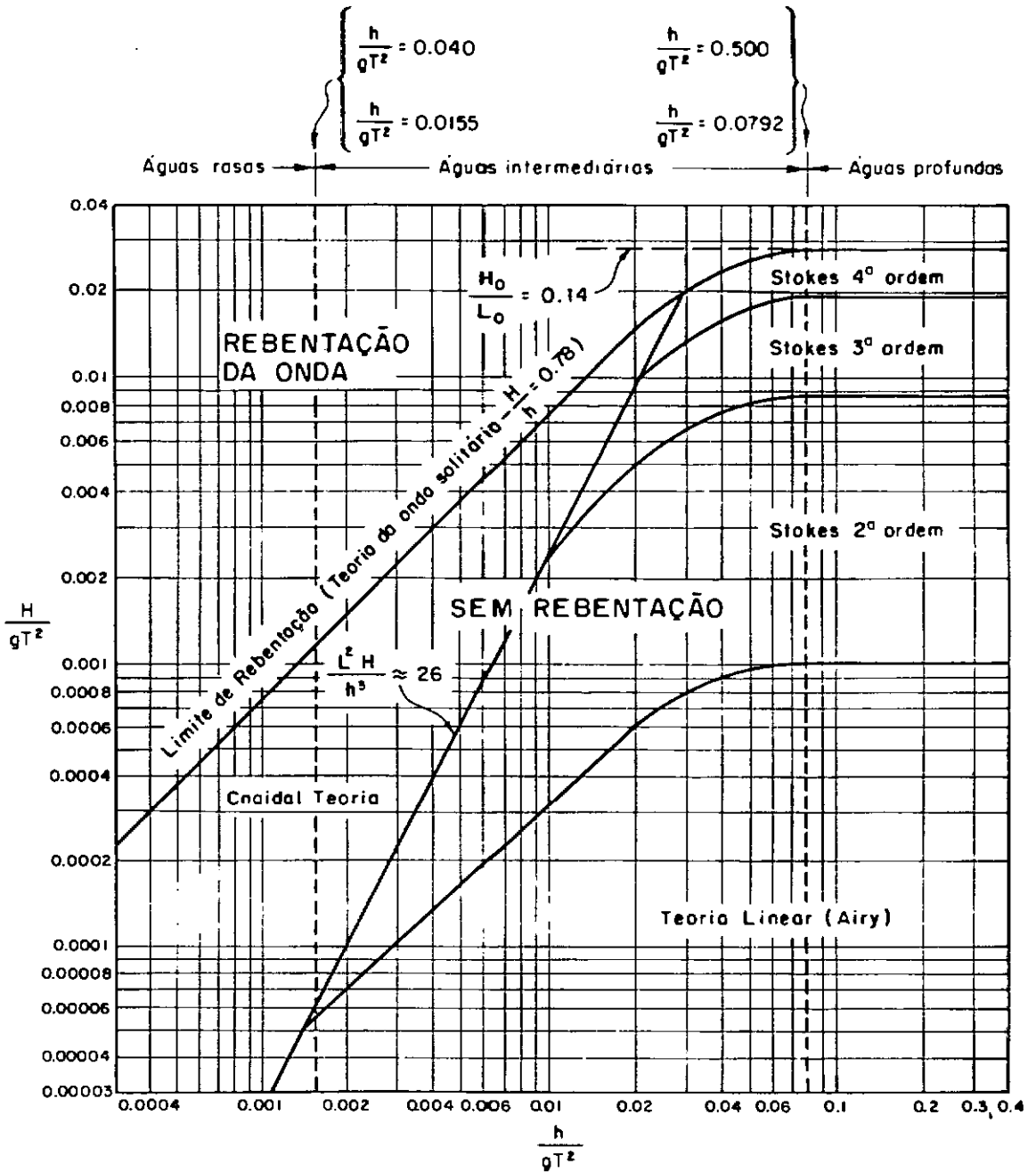
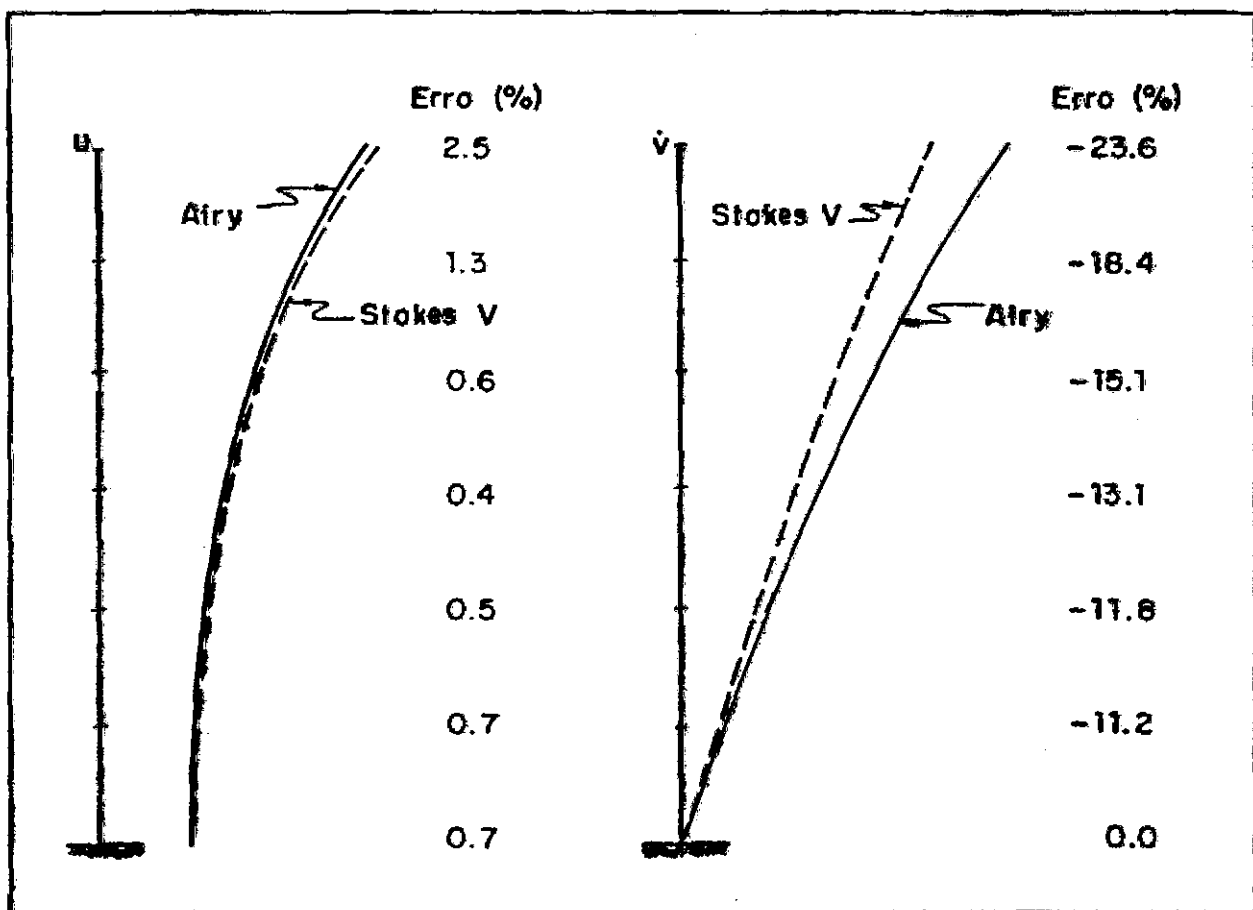


FIG. II.14a-Altura de rebentação da onda e regiões de validade das várias teorias de onda.

d = 30.5 metros;      a = 7.93 metros;      T = 10 seg.				
	TEORIA DE AIRY		TEORIA DE STOKES V	
Cota	u	$\dot{v}$	u	$\dot{v}$
30	5.530	-3.051	5.666	-2.330
25	4.558	-2.332	4.615	-1.901
20	3.824	-1.734	3.848	-1.471
15	3.289	-1.227	3.304	-1.066
10	2.926	-0.784	2.941	-0.691
5	2.716	-0.382	2.734	-0.339
0	2.647	0	2.666	0

Tabela II.2

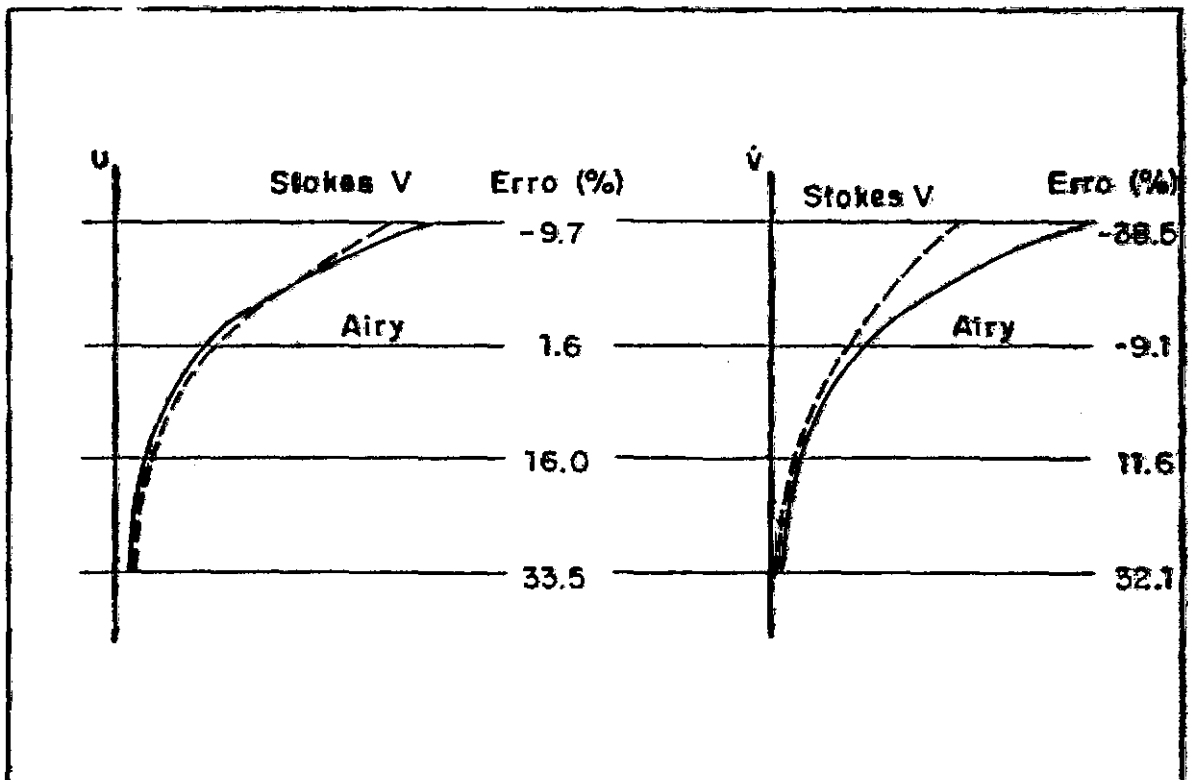
Velocidades e Acelerações com as Duas Teorias

FIG. II.15 - Perfís de  $u$  e  $\dot{v}$ .

d = 180 metros;      a = 10.68 metros;      T = 10 seg.				
	TEORIA DE AIRY		TEORIA DE STOKES V	
Cota	u	$\dot{v}$	u	$\dot{v}$
180	6.710	-4.216	6.061	-2.593
150	2.006	-1.261	2.039	-1.146
120	0.600	-0.376	0.696	-0.421
90	0.179	-0.112	0.239	-0.148

Tabela II.3

Velocidades e Acelerações com as Duas Teorias

FIG. II.16 - Perfís de  $u$  e  $\dot{v}$ .

## CAPÍTULO III

FENOMENOLOGIA DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURAIII.1 - INTRODUÇÃO

É quase intuitiva a compreensão, que o ambiente fluídico que circunda, ou penetra numa estrutura situada no seu meio, pode alterar substancialmente suas propriedades dinâmicas, e com muito maior razão, se a estrutura for relativamente flexível. Forças aparentemente não identificáveis a grosso modo numa análise bastante superficial, podem exercer esforços comparáveis em ordem de grandeza às forças de inércia e elásticas.

Ainda que muitas vezes, por uma questão de simplificação ou desconhecimento de causa, não se leve em conta a verdadeira interação; uma vez que, considerações de caráter vivencial permitam, se despojar do problema, suas características tidas como secundárias; o fenômeno da interação, mesmo que, num nível muito restrito, continuará a existir. Estes diversos níveis, ou estágios de envolvimento das quantidades inerentes a questão, chegarão ao nosso senso prático, através da quantificação de grandezas chamadas de "forças".

Dois subsistemas se encontram presentes, um sólido e outro fluídico, e em virtude da variedade de questões suscitadas por este "Status Quo", que se degeneram em espécies particulares de problemas; é também uma preocupação deste Capítulo, buscar a unidade de um campo de conhecimento, que reúne ramificações aparentemente sem a menor relação. E para isto, é reforçado o uso do termo "fluídoelasticidade", como será visto.

Na verdade, o que se tem tantas vezes referido com a denominação "interação-fluido-estrutura", quer seja num âmbito global ou mesmo localizado, pode ser apresentado conceitualmente, como uma inter-relação de ações recíprocas, simultâneas, interligadas e retroalimentadas, num processo contínuo. Isto é, a presença da estrutura altera propriedades do meio

fluido, e este por sua vez da estrutura, de forma que um único sistema detém as propriedades.

Em vista disto, pode-se observar o grau de dificuldade, que apresenta o tratamento acoplado do problema, e maior ainda, se reunidos muitos dos fatores atuantes. E mesmo usando-se de alternativas adequadas, o problema se tornaria insolúvel, se se pretendesse reproduzir fielmente os mecanismos físicos intervenientes no problema, ao nível do conhecimento atual. Apesar dos recentes progressos o assunto se encontra amplamente em aberto.

O presente Capítulo procura dentro do conhecimento atual, vasculhado na literatura disponível, enfatizar a compreensão do mecanismo físico interveniente neste processo de inter-relação entre fluido e estrutura, colocando-o exclusivamente em aspectos qualitativos, fazendo observações para os casos desfavoráveis, prescrevendo verificações para as situações mais críticas, e definindo o método simplificado para abordagem do problema.

### III.2 - CARACTERIZAÇÃO GRÁFICA DA INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Estas representações gráficas servem para estimular a perfeita compreensão das definições básicas, sua natureza e sua extensão; e ao mesmo tempo, colocar o leitor numa situação privilegiada, em que possa ter uma visão do conjunto de fatores (forças), seus laços de ligações, manifestações, predominâncias e consequências.

#### III.2-1 - Triângulo Fluidoelástico

Na Figura III.1 este diagrama típico, foi desenhado após o original de A. R. Collar e adaptado por Heller e Abramson [167]. E mostra nos círculos os três tipos de forças geralmente envolvidas nos problemas de interação (fluidoelásti

cas). No centro do triângulo, o hexágono localiza os problemas eminentemente fluídoelásticos. (Vê-se na Figura F+E+I). Os problemas fluídoelásticos estáticos estão localizados fora do triângulo e dentro das figuras ovais. As linhas de ligação espessas significam uniões definidas e as interrompidas uniões fracas. E nestas, as dentro das ovais interrompidas não são fluídoelásticas. No entanto, elas ainda possuem um relacionamento estrito, exibindo características de interação, e a uma leve mudança de condições, podem migrar mais para dentro do hexágono. Por exemplo: vibrações mecânicas (v), são muitas vezes analisadas como se ocorressem no vácuo. Uma análise fluídoelástica seria necessária, no entanto, se o fluído fosse um líquido. E a estabilidade dinâmica (ED), inclui por exemplo o movimento ressonante de uma plataforma de perfuração ancorada (quando interage com ondas de um dado período) ou o movimento dos elementos de um quebra-onda flutuante. Conectando-se estes elementos com membros elásticos ou por cabos, pode-se criar efeitos como o golpeamento ("buffeting") (B) e problemas de cabos (C) respectivamente.

Contudo, a classificação de fenômenos pouco conhecidos no triângulo fluídoelástico, requer um julgamento concernente à importância relativa das forças e dos deslocamentos envolvidos. Isto orienta as investigações em direção ao seu julgamento básico, constituindo-se por isso, num dos méritos do triângulo fluídoelástico. Todavia, é conveniente conduzir os assuntos para os casos em que se encontre, em geral, muita literatura.

A classificação mostra diversas ligações e suas relações, e que podem servir para o direcionamento de outros tantos esforços em futuras abordagens do problema.

A Figura III.3-a, b, c, mostra alguns casos de fenômenos fluído-elásticos.

F: FORÇAS DO FLUIDO

E: FORÇAS ELÁSTICAS

I: FORÇAS DE INÉRCIA

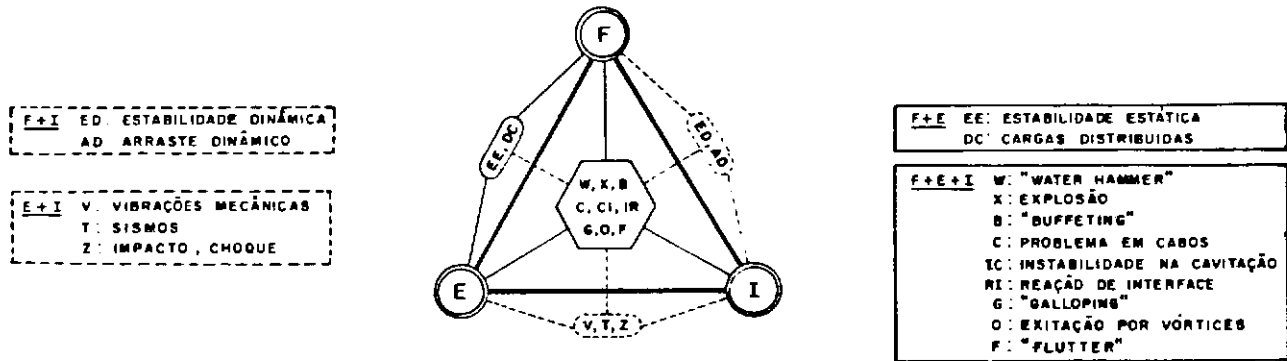


FIG. III.1 — Triângulo fluidoelástico.

### III.3 - PROBLEMA DA INTERAÇÃO, EM ESTRUTURAS ELÁSTICAS SUBMERSAS

É conhecido o efeito da pressão acústica exercida por um meio gasoso sobre uma estrutura metálica vibrante, e em muitas situações é um efeito desprezível na resposta dinâmica da estrutura. As características dinâmicas de uma estrutura vibrante (placa ou casca) [79], na atmosfera, é efetivamente o seu modo de vibração no vácuo. Exceções fogem à regra, quando o meio ambiente é confinado a um contorno rígido, ou quando, a estrutura é excitada até próximo de uma das suas ressonâncias. Em contraste, a resposta dinâmica de uma estrutura em água, difere muito da sua resposta no vácuo, porque a carga de radiação, exercida pelo fluido do ambiente é comparável em magnitude com as forças elásticas e de inércia, no entanto, o problema elástico de prever a resposta dinâmica para forças prescritas atuando sobre a estrutura não pode ser separado do problema acústico de prever a pressão acústica no meio ambiente e, especificamente na sua interface com a estrutura, para uma configuração dinâmica prescrita nesta interface. O problema elástico e acústico estão acoplados num circuito retroalimentado, pois as cargas de radiação modificam as forças que excitam a estrutura. As cargas de radiação tomam a forma de forças de inércia associadas às massas d'água circundantes, e as forças resistentes se incorporam à radiação da energia acústica. As cargas de radiação são excepcionalmente compatíveis com a existência dos modos normais.

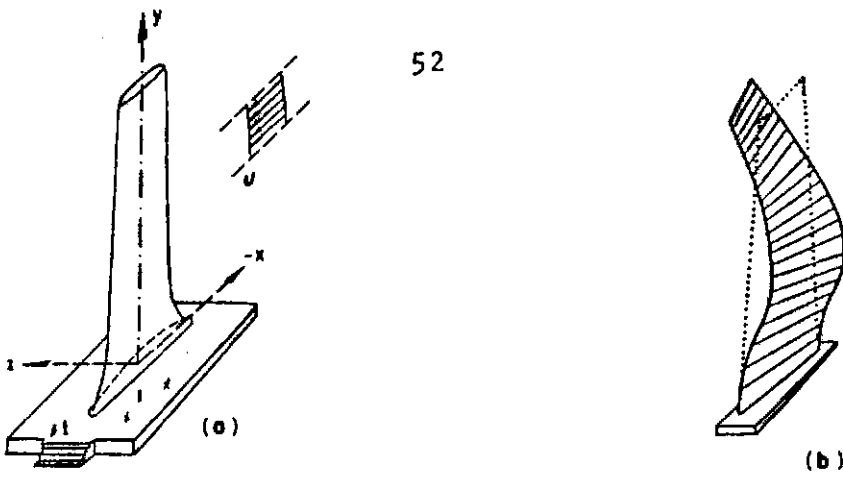


FIG. III.2 - Um exemplo ilustrativo do problema fluidoelástico.

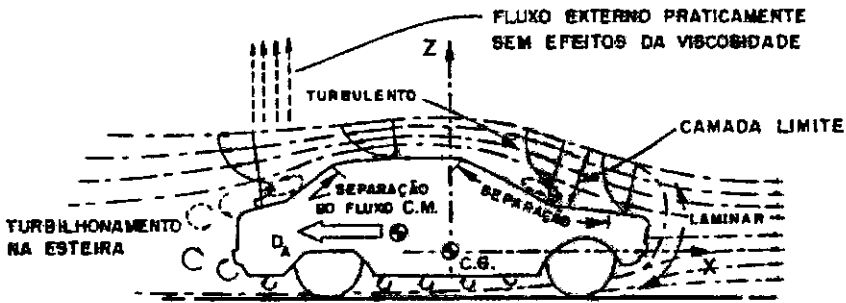


FIG. III.3 - Comando limite ao longo da superfície de um carro

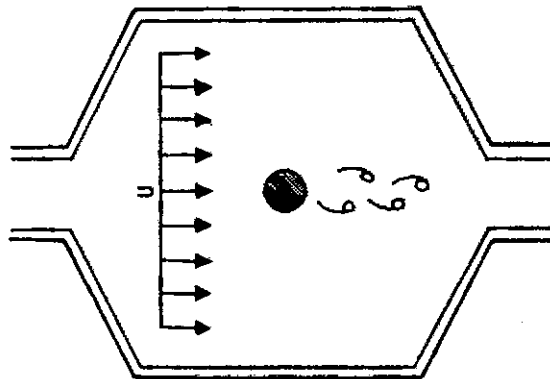


FIG. III.4 - DESPRENDIMENTO DE VÓRTICE DENTRO DE UMA CAVIDADE ( ACÚSTICA )



Infelizmente, a menos que uma solução possa resolver, ou ao menos se aproximar dos modos normais da estrutura submersa, uma solução analítica não poderá ser desenvolvida. Soluções numéricas do problema da interação, não podem certamente exigir a determinação precisa dos modos normais, mas diferentes soluções analíticas, dificilmente revelaram explicitamente a relação funcional, que possa governar a resposta da estrutura e a radiação do som resultante. A Figura III.4 identifica um destes efeitos, mostrando o caso da ressonância dentro de uma cavidade (acústica) de um trocador de calor provocada pelo desprendimento de vórtice num cilindro circular.

Algum esforço tem sido feito para descrever vários aspectos desta interação dinâmica, de uma estrutura elástica num meio líquido infinito ou semi-infinito, com especial ênfase as condições abaixo das quais as estruturas conservam, os modos normais quando submersas [79].

### III.4 - NATUREZA FÍSICA DO PROBLEMA

Antes da preocupação da análise matemática do problema, é sempre conveniente uma pausa, para considerar sua origem física. Ambas as situações são fundamentais para a escolha do modelo matemático.

Nos seus ingredientes físicos, o problema básico é aparentemente simples: uma estrutura está imersa numa corrente de fluido. Quer-se-á responder duas indagações sobre o sistema fluido-estrutura.

- 1) Sobre que condições uma perturbação no sólido e líquido (e fluido) diminui ou aumenta?
- 2) Se a perturbação aumenta, qual é seu estado final?

A primeira questão é clássica da estabilidade e é usualmente tratada dentro da teoria linear. A segunda, que

envolve o maior interesse, carece de uma análise não linear, visto que a teoria linear prevê um aumento da perturbação que continuará crescendo indefinidamente. Se procurado este caminho, o primeiro passo para a formulação não linear do problema, é a identificação das não linearidades dominantes no sistema. Para isto, alguns recorrem às evidências experimentais, e/ou para a ordem das magnitudes na análise das equações da mecânica dos sólidos e fluidos [ 38 ].

Todavia, o fluxo de fluido e a estrutura formam sistemas que se interagem, e sua interação é dinâmica. Estes sistemas se encontram acoplados pela força exercida sobre a estrutura, pelo fluido. A força do fluido causa deformação na estrutura, se a estrutura por sua vez se deforma, ela muda sua orientação no fluxo, e a força do fluido pode mudar. Alguns casos, como a excitação das placas dos cascos de navios, na agitação das águas que se projetam sobre ele, as forças do fluido são independentes das pequenas mudanças de posição da estrutura.

Em outros casos, tal como as vibrações em linhas de transmissão cobertas por gelo num vento permanente, as forças do fluido são completamente determinadas pela orientação da velocidade da estrutura relativa ao fluxo do fluido. Modelos matemáticos são gerados para a estrutura e para o fluido. Desde que, muitas estruturas sejam quase lineares na deformação, com o aumento da carga, estas podem ser modeladas como osciladores lineares. Os modelos para os fluidos são mais sensíveis.

Desde que uma precisão, para o modelo genérico das forças do fluido exercida sobre uma estrutura rombóide, não exista, os modelos de fluido contam com extrapolações não lineares de medidas de testes de sustentação, arraste, ou pressões superficiais. A interação dinâmica da estrutura e o modelo do fluido é descrito por uma equação de oscilador não linear. Se mais de um modo estrutural ou grande liberdade está presente, como a translação e torção, muitos grupos de equações são necessários para descrever o sistema.

Em alguns casos, como excitações por turbulência, o tempo aparece explicitamente nas equações porque a força no fluido depende da turbulência produzida na corrente acima, com mais razão que a orientação da estrutura. Se as forças no fluido dependem totalmente da disposição da estrutura, como o giro rápido de tubos revestidos, então o tempo não aparece explicitamente na equação [12]. Infelizmente, as forças do fluido geralmente contêm não linearidades de primeira ordem. Como resultado, poucas soluções gerais são possíveis. Bleuvís [12], resolve casos especiais, apresentando resultados numéricos, e medições em parâmetros testados.

### III.5 - ESTRUTURAS FLEXÍVEIS E VIBRANTES

Como foi mencionado no item (III.3), a reação do fluido que se encontra ao redor da estrutura, pode causar efeitos significativos em sua vibração e irradiação sonora.

Poderão ser incluídos nestes aspectos a carga do fluido, que se constitui essencialmente na reação do fluido ao movimento do corpo; outras forças são provocadas pelo movimento do fluido e o campo acústico (ou estruturas rígidas).

São três as classificações dadas às forças de reação sobre um corpo, feitas por seu movimento nos fluidos [100]. Para um certo percurso o corpo aumenta sua energia cinética, armazenando-a no fluido; o fluido tem uma reação de inércia, afetando a dinâmica da estrutura. Se os fluidos foram considerados, ainda que pouco compressíveis, um pequeno montante da energia pode ser irradiada adiante do corpo como som. Este significativo efeito de carga de fluido, assume grande importância, quando a interação da estrutura com um campo sonoro é investigado.

Quando o fluxo do fluido é permanente, então forças de arraste são produzidas sobre o corpo. Vibrações sobre o corpo podem modular estas forças e produzir efeitos reativos,

que são essencialmente dissipativos. Distintos efeitos de radiação sonora, que também são dissipativos, causam a modulação das forças permanentes, e dependem da velocidade do fluxo externo. Como se vê, as forças de arraste podem causar a instabilidade, amplificação e potencialmente, movimentos prejudiciais à estrutura.

Algumas outras idéias simples, mais ilustrativas, de efeitos correlatos, podem ser entendidas, por exemplo, num fluxo passando por uma estrutura cilíndrica, em dois regimes diferentes do número de Reynolds. Para um baixo Reynolds, o fluxo permanece laminar ao redor do corpo. A distorção nas linhas de corrente (Figura III.4a), causam um aumento de densidade da energia cinética ao redor do corpo. Este aumento, quando referido à velocidade do fluxo, pode ser representativo do acréscimo virtual de massa do fluido associada a estrutura, em semelhança ao que se constata, sempre que se quer mudar a velocidade de um fluxo em andamento (ou a velocidade do corpo num fluido em repouso).

Se a velocidade do fluxo continua aumentando, o fluxo vai se dividir no outro lado da estrutura, e uma força de arraste permanente vai ser experimentada pela estrutura. Uma região de acréscimo da densidade da energia cinética ainda continua a existir na face anterior, mas a mudança de uma velocidade ordenada, para movimentos aleatórios desordenados na esteira, introduzem um grande componente dissipativo no fluxo. Quando um pequeno componente oscilatório da velocidade, é devido a vibração da estrutura, então surgirá um componente de força que é oposta ao movimento e proporcional à velocidade de flutuação do fluxo médio.

Quando ocorre a separação, o efeito dominante do carregamento do fluido é um amortecimento da oscilação através da flutuação da força de arraste. Como se observa, exatamente este tipo de força pode causar movimentos amplificados num extenso sistema.

### III.6 - EFEITOS DA FORMAÇÃO DE VÓRTICES

O efeito da viscosidade em torno da estrutura, produz em contribuição ao arraste, o despreendimento de vórtices na esteira. Estes vórtices ocorrem alternadamente de um lado e outro da esteira atrás da obstrução (Figura III.5). A sucessão deles é chamada de corredor de vórtices e sua frequência é dada por um número adimensional, chamado de número de Strouhal. Se a frequência do despreendimento dos vórtices é semelhante a frequência da estrutura, as forças de sustentação que são várias vezes maiores que a força de arraste e também oscilatórias podem ocorrer. Em muitos casos as frequências naturais da estrutura estão acima das frequências significativas do espectro da onda, ou da frequência da onda de projeto, mas dentro da frequência do despreendimento dos vórtices, e a ressonância ocorre. Os engenheiros projetistas de estruturas devem estar ciente disto, pois muitas falhas deste tipo têm sido registradas.

#### III.6-1 - Mecanismo de Formação de VÓRTICES

Assim como um fluxo de partículas de fluido, são orientadas na direção das bordas de um corpo cilíndrico rombóide, as pressões nestas partículas, aumentam desde a corrente livre até o ponto de estagnação. A alta pressão do fluido próxima à direção do bordo provoca o desenvolvimento da camada-limite sobre ambos os lados do cilindro. No entanto, a força de pressão não é suficiente para manter a camada-limite ao redor da porção traseira de um cilindro rombóide, para um alto número de Reynolds. Perto de uma seção mais distante do cilindro, a camada-limite separa-se de cada lado do cilindro e se formam duas camadas cizalhantes livres, que seguem ao final do fluxo. Estas duas camadas cizalhantes livres delimitam a esteira. Desde a porção mais interna, a camada cizalhante livre move-se muito mais lentamente que a porção mais externa da camada, que está em contato com o fluxo livre; as camadas cizalhantes livres tendem a enrolar-se sobre o interior em discretos redemoinhos (vórtices).

Uma sequência regular de vórtices é formada na esteira, e integral com o movimento da estrutura e, são a fonte das chamadas vibrações induzidas por vórtices.

Forças periódicas sobre a estrutura, são produzidas por vórtices que alternadamente se desprendem de cada lado da estrutura. Estas forças oscilantes podem levar cilindros elasticamente montados a vibrar e emitir sons. As vibrações de grande amplitude induzidas em estruturas elásticas pelo desprendimento de vórtices, são de grande importância prática, porque são conhecidos seus efeitos destrutivos sobre pontes, cabos, antenas e trocadores de calor.

A Figura III.6 mostra o campo de pressão oscilante, e as forças que aparecem sobre o corpo, para um dado tempo do ciclo de desprendimento do vórtice.

Alguns autores têm demonstrado experimentalmente a existência de uma flutuação periódica no alinhamento do fluxo de aproximação de um corpo rombóide, envolvendo a reorganização do modelo do fluxo, tal que a linha de corrente central passa alternativamente de um lado para outro do corpo com a mesma frequência de desprendimento dos vórtices [29]. Foi observado que a trajetória seguida pela linha de emissão central, está sempre fora da camada cizalhante promotora do vórtice formado. Uma implicação desta oscilação corrente acima é que a quantidade que passa de um lado para outro do corpo, flutua com o desprendimento do vórtice, sugerindo que, uma variação da velocidade na separação é também uma característica. Esta consequência, por outrossim é consubstanciada na observação do alinhamento da camada cizalhante, que também muda durante a formação do vórtice, se tornando mais distante do corpo, e portanto, causando uma grande concentração do fluxo, no lado de fora do preenchimento do vórtice. A Figura III.5 com suas linhas tracejadas procura ilustrar este efeito.

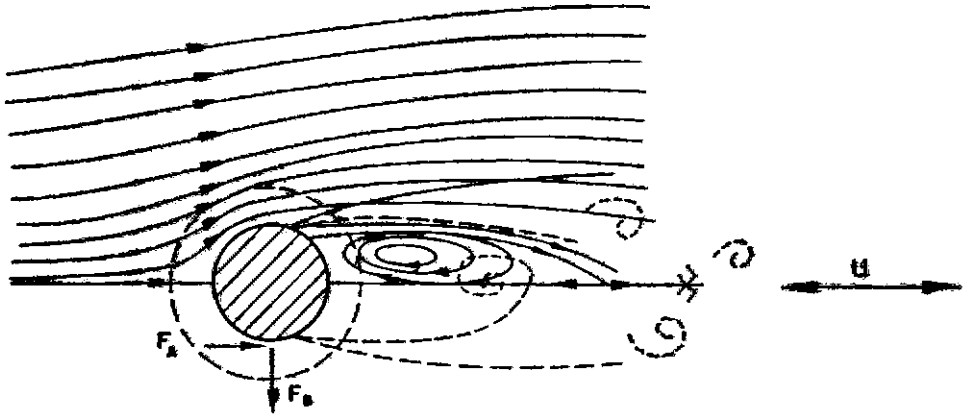


FIG. III.5 - Fluxo oscilante em torno da estrutura.

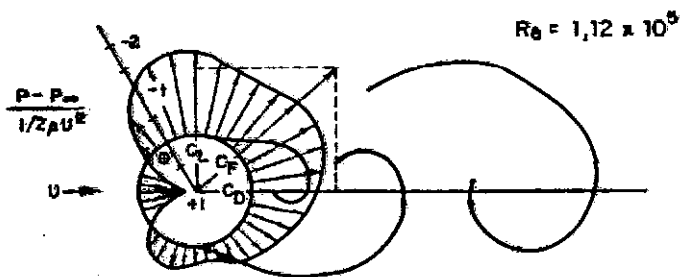


FIG. III.6 - Distribuição das pressões causadas pela formação de vórtice.

### III.6-2 - Vórtice na Esteira de uma Estrutura Rígida

Para um baixo Número de Mach (Item VII.9-7), a esteira periódica formada atrás de uma estrutura cilíndrica, é apenas função do Número de Reynolds ( $Re$ ). Os maiores regimes de desprendimento de vórtice para uma estrutura cilíndrica são mostrados na Figura III-7. Conforme reprodução [12].

Para número de Reynolds muito baixo, o fluido não se separa. Se  $Re$  começa a crescer, um par de vórtices fixos se forma imediatamente atrás da estrutura. Com  $Re$  crescendo ainda mais, os vórtices se alongam até que estes se quebrem ao longo; e uma esteira periódica, e um corredor de vórtices oscilantes é formado. Acima de  $Re \approx 150$ , o corredor de vórtices é laminar. Para  $Re \approx 300$  o corredor é turbulento e degenera num fluxo totalmente turbulento, a uma distância além de 50 diâmetros da estrutura. Para  $Re$  entre 300 e  $\approx 3 \times 10^5$  tem-se uma situação subcrítica, porque ela ocorre antes do início da camada-limite turbulenta; para  $Re \approx 3 \times 10^5$  depende da turbulência na corrente livre e da rugosidade da superfície. Nesta classe de  $Re$  subcrítica, o desprendimento ocorre numa frequência bem definida. Na transição de  $Re$ , o ponto de separação do fluxo se move para trás, o desprendimento de vórtice é desorganizado (com uma larga banda de frequências), e a força de arraste cai muito. Para altos  $Re$ , regime supercrítico, o corredor de vórtice turbulento é reestabelecido por si mesmo.

### III.6-3 - Influência do Movimento da Estrutura Sobre a Esteira

As vibrações numa estrutura cilíndrica, próximas da frequência de desprendimento de vórtices, e normais à corrente livre, podem [12]:

- Aumentar a intensidade do vórtice;
- Aumentar o caminho de correlação na esteira;



- A freqüência das forças do desprendimento de vórtices, mudam as freqüências de desprendimento da estrutura estacionária, para a freqüência de vibração da estrutura. Este efeito também pode ser produzido se a freqüência de vibração for igual ao múltiplo ou submúltiplo da freqüência de espalhamento;
- Provocar o crescimento da força de arraste.

Vibrações na, ou próximas à freqüência de desprendimento de vórtice, tem um forte efeito reorganizador na esteira. A correlação de desprendimento de vórtice, aumenta consideravelmente ao longo do eixo da estrutura. Esta correlação é uma medida da tri-dimensionalidade do fluxo na esteira da estrutura. Por exemplo, a correlação de 1,0 corresponde ao fluxo bidimensional, com vórtices despreendidos uniformemente ao mesmo tempo. A freqüência de despreendimento sincroniza-se com a freqüência de vibração. A banda de sincronização é um intervalo de velocidades do fluxo, sobre o qual a freqüência de despreendimentos dos vórtices sincroniza com a freqüência da estrutura vibrante. Quando a amplitude de vibração do cilindro cresce em torno de  $0,5 D$ , o modelo simétrico de vórtices alternadamente espaçados, começa a se destruir. Esta destruição da simetria de desprendimento de vórtices, implica que forças induzidas pelos vórtices sobre o cilindro, são autolimitantes em amplitudes de vibração do cilindro na ordem de um diâmetro.

Freqüências de vibrações da estrutura, distantes dos harmônicos e sub-harmônicos da freqüência de desprendimento de vórtices, tem um efeito muito pequeno sobre a esteira.

### III.7 - CLASSIFICAÇÃO DE ALGUNS CASOS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Em função da natureza do problema interação-fluido-estrutura, estes podem ser agrupados segundo certas características comuns de comportamento, conforme as categorias:

- a) Problemas com grandes deslocamentos: a estrutura ou parte dela está normalmente vinculada em um ou mais pontos fixos ou móveis - o fluido é incompressível.  
Exemplo: caso típico de oscilações em cabos; grandes movimentos relativos em "*raisers*", "*pipelines*", emissários no oceano; a ocorrência do "*flutter*" em veículos aéreos, e etc.
- b) Problemas com pequenos deslocamentos: a estrutura possui vinculações do tipo anterior: - não existe compressibilidade, e a excitação é de longa duração.  
Exemplo: estruturas "*off shore*", líquidos contidos em recipientes (vasos ou tanques), movimento característico dos navios, ação de ventos sobre construções, sismos em barragens, correntes sobre pilares, e o fluxo do refrigerante sobre as barras de combustíveis nucleares, etc.
- c) Problemas impulsivos de curta duração: sujeito a efeitos de compressibilidade - estrutura é fixa, o fluido é confinado, ou a perturbação é localizada.  
Exemplo: explosões em vasos, cargas de impacto, impacto de estruturas sobre líquidos com superfície livre, "*slamming*", fluxo em tubulações (sob pressão), etc.
- d) Problemas com movimentos relativos apreciáveis: a estrutura se encontra livre e mergulhada no meio ilimitado, o fluido pode ou não ser incompressível.  
Exemplo: veículos aerodinâmicos, corpos em velocidades super-sônicas, movimentos de projéteis num meio fluido, explosões submarinas, e etc.

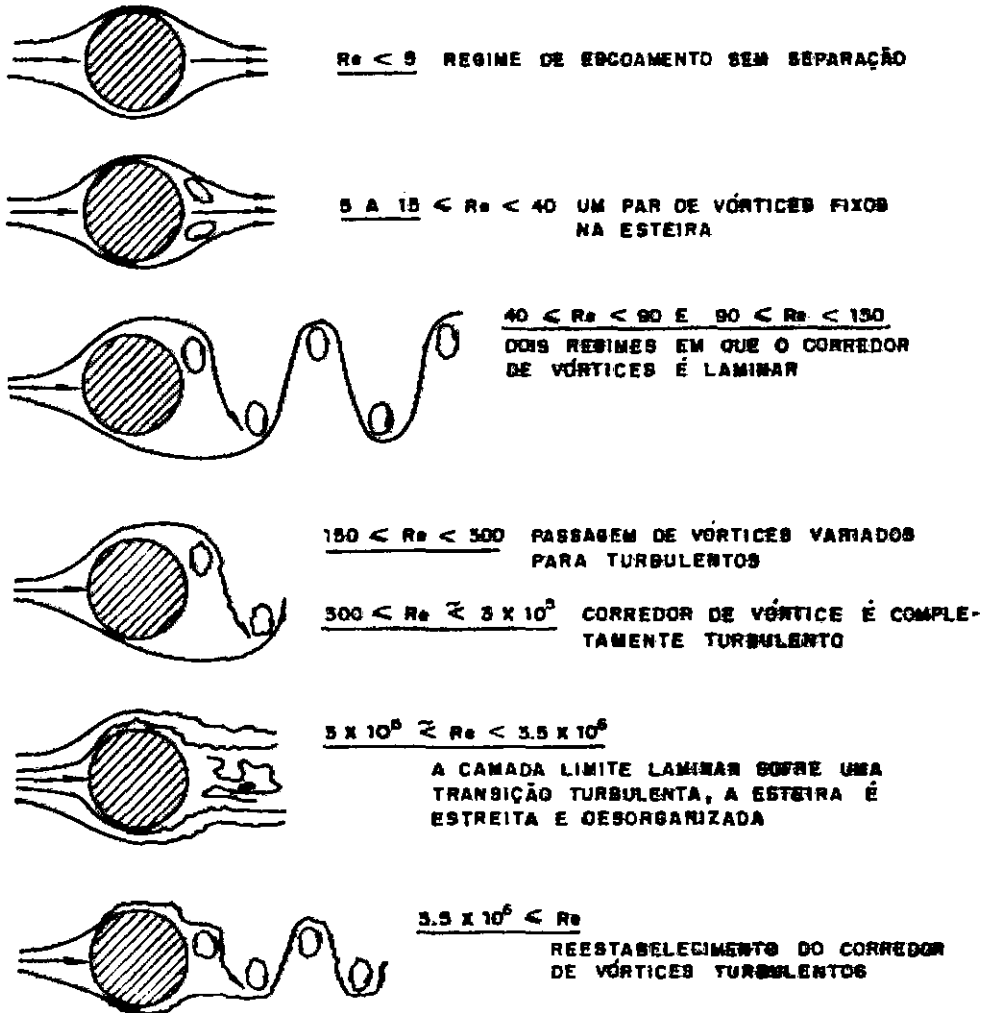


FIG. III. 7 - Regimes de escoamento passando por um cilindro.

### III.8 - FORMAS DE ABORDAGEM DO PROBLEMA INTERAÇÃO

- a) As solicitações induzidas pelo fluido são computadas por processos próprios e independentes do fenômeno estrutural, e posteriormente introduzidos na estrutura para sua análise, como um carregamento conhecido, isto é, como uma força externa, após uma série de simplificações (PIFES);
- b) Estrutura e fluido são discretizados da mesma forma, porém o fluido é tratado como um sólido elástico sem resistência ao cisalhamento. O movimento do fluido e da estrutura são descritos por seus deslocamentos (Lagrangiano); ou então, o fluido pode ser caracterizado por uma única pressão (ou potencial) variável <sup>[186]</sup> e o acoplamento feito por uma consideração das forças de interface (método euleriano), e tem a vantagem de um menor número de variáveis para descrever o movimento do fluido, todavia apresenta o inconveniente que os elementos da interface podem originar matrizes sem características de banda, elevando o custo computacional, sendo contudo um processo efetivo se os efeitos de compressibilidade são desprezados.  
É também usual diversas formas de discretização, além de alternarem-se elementos finitos e/ou procedimentos de solução de contorno (solução através de integrais de contorno) especialmente se existe uma extensão infinita de fluido;
- c) Processo misto. A estrutura (domínio interior) e o fluido (domínio exterior) são tratadas de formas diferentes <sup>[183]</sup>, <sup>[187]</sup>, <sup>[188]</sup>. A estrutura é tratada por uma solução de ele

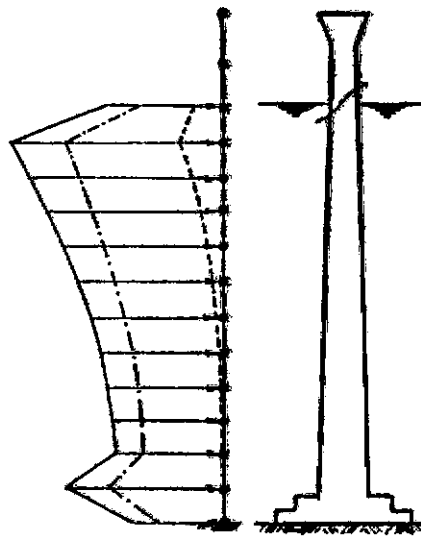
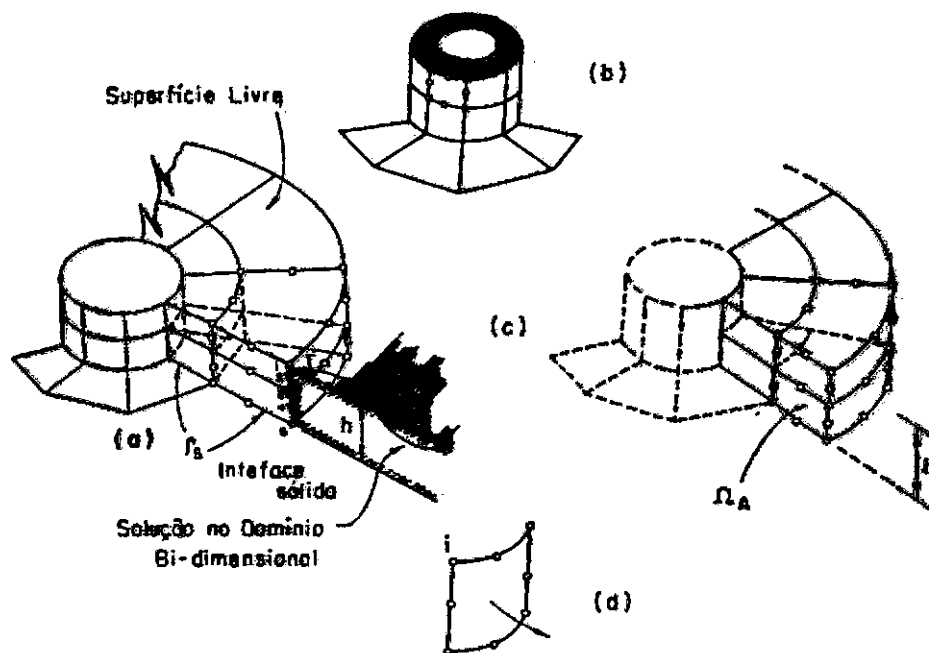


FIG. III.8e



a - DISCRETIZAÇÃO TRI-DIMENSIONAL

b - ESTRUTURA DISCRETIZADA POR E.F.

c - DOMÍNIO DO FLUIDO QUE INTERAGE COM A ESTRUTURA-DISCRETIZ. COM E.F. PRÓPRIOS

d - ELEMENTO DE INTERFACE

e - PIFES

FIG. III.8 - Modelo de interação fluido - estrutura.

(Ref. 105)

mentos finitos, enquanto que o fluido através de uma solução exterior (séries, analíticas ou integrais de contorno (distribuição de fontes e identidade de Green) [188].

Em outras palavras, elementos finitos são convenientemente usados em torno do corpo, ou somente onde o meio é heterogêneo, ao passo que as representações analíticas são usadas longe destas irregularidades. Existe uma transição entre a região analítica e a discretizada, onde são utilizados os chamados super-elementos, por outro lado, se também as representações analíticas têm dificuldade de representação longe do corpo, elementos de comprimento infinito (elementos infinitos) têm sido usados com sucesso [189].

A Figura III.8, tenta ilustrar estas formas de abordagem do problema de interação.

### III.9 - VARIÁVEIS SIGNIFICATIVAS ADIMENSIONAIS

#### III.9-1 - Parâmetros da Onda

Estes parâmetros regem o comportamento das ondas, e em função de seus valores, tem-se situações particulares:

$$\frac{H}{L} = \text{inclinação da onda} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{o mais importante em águas} \\ \text{profundas} \end{array} \right.$$

$$\frac{H}{h} = \text{altura relativa} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{o mais significativo em} \\ \text{águas rasas} \end{array} \right.$$

$$\frac{h}{L} \quad \text{ou} \quad kh = \text{profundidade relativa}$$

$$\left(\frac{H}{L}\right) \left(\frac{L}{h}\right)^3 = \text{Parâmetro de Ursell} \quad (\text{águas intermediárias})$$

como está se tratando da teoria linear em águas profundas, tem-se os seguintes limites para estes parâmetros:

$$\frac{H}{L} \ll 1; \quad \frac{H}{h} \ll 1; \quad \frac{h}{L} > \frac{1}{2}; \quad \left(\frac{H}{L}\right) \left(\frac{L}{h}\right)^3 \ll 1$$

### III.9-2 - Parâmetros de Interação da Onda

Quando uma onda passa por uma estrutura, suas características são afetadas pela presença do corpo; e os principais efeitos resultantes desta interação, são o efeito de espalhamento da onda sobre o corpo e a dissipação viscosa na esteira da estrutura [54].

### III.9-3 - Parâmetros de Espalhamento (ka)

Descreve o espalhamento da onda sobre a estrutura. Quando se trata de estruturas de grandes dimensões, este é o parâmetro mais expressivo deste efeito (difração)

$$ka = \frac{\pi D}{L} = \frac{2\pi}{L} a = \frac{\text{diâmetro de estrutura}}{\text{comprimento da onda}} \quad (\text{III.1})$$

### III.9-4 - Parâmetro de Esteira (H/D)

Descreve os efeitos de esteira, e bem caracteriza o fenômeno de dissipação viscosa na esteira do corpo

$$\frac{H}{D} = \frac{\text{altura da onda}}{\text{diâmetro da estrutura}} = \frac{A}{a} \quad (\text{III.2})$$

### III.9-5 - Número de Keulegan - Carpenter ( $N_{kc}$ )

Também denominado de parâmetro de período. É uma forma redundante do parâmetro de esteira e está associado ao fenômeno de separação, formação de vórtices e o surgimento da força de sustentação (Lift) conforme se pode verificar em [81]. É dado pela relação

$$N_{kc} = \frac{U_m T}{D}$$

ou pela expressão equivalente:

$$N_{kc} = \frac{\pi H}{D} \quad (III.3)$$

onde

$U_m$  = a máxima velocidade das partículas d'água na direção da onda

### III.9-6 - Número de Reynolds (Re)

O aumento da camada-limite e a separação do fluxo são determinados por forças no fluido a nível microscópico. A camada-limite é impelida contra o corpo pela inércia do fluxo, e o atrito viscoso sobre a superfície do corpo retarda o fluxo; de forma que, o número de Reynolds representa uma relação entre as forças de inércia e viscosas.

$$Re = \frac{U_m D}{\nu} = \frac{\text{forças de inércia}}{\text{forças viscosas}}, \quad (III.4)$$

onde

$\nu$  = coeficiente viscosidade cinemática do fluido

o número de Reynolds fornece também, informações sobre a passagem de um regime (do fluxo) para outro; da separação do fluxo,



e da espessura da camada-limite.

### III.9-7 - Número de Mach (Ma)

Este parâmetro informa sobre a tendência do fluido se comprimir, de encontro à estrutura; e é dado por:

$$Ma = \frac{u}{c} = \frac{\text{velocidade do fluido}}{\text{velocidade do som}} \quad (III.5)$$

como este estudo está limitado a baixos números de Mach ( $Ma < 0,3$ ) o efeito de compressibilidade não será considerado.

### III.9-8 - "Amplitude Adimensional" e Velocidade Reduzida

Seja a estrutura fixa no fundo d'água. Supõe-se que ela vibre pela ação de um fluxo permanente, de velocidade  $U$  (velocidade na corrente livre) numa frequência  $f$ . O comprimento da trajetória para um ciclo será:  $d = UT = \frac{U}{f}$  e a largura  $2Ae$ , onde  $Ae$  = amplitude de vibração da estrutura.

O comprimento da trajetória pode ser relacionado com uma dimensão característica da estrutura (diâmetro)

$$\frac{d}{D} = \frac{U}{fD} = \frac{\text{comprimento da trajetória por ciclo}}{\text{largura da estrutura}} \quad (III.6)$$

relação chamada de velocidade reduzida, ou velocidade adimensional.

Uma outra relação importante, é a amplitude adimensional:

$$\frac{Ae}{D} = \frac{\text{amplitude da vibração}}{\text{largura da estrutura (diâmetro)}} \quad (III.7)$$

a dimensão característica, tende a governar a largura da esteira.

Se a velocidade reduzida é pequena ( $< 10$ ) então, a estrutura interage intensamente com as componentes periódicas nas proximidades da esteira.

### III.9-9 - Parâmetro Geométrico

A geometria é o mais importante parâmetro na determinação das forças do fluido sobre a estrutura; e é dada por uma relação de esbeltez

$$\frac{\ell}{D} = \frac{\text{comprimento da estrutura}}{\text{largura da estrutura (diâmetro)}} \quad (\text{III.8})$$

### III.9-10 - Parâmetro de Massa

Estabelece a relação entre a massa da estrutura e a do fluido deslocado, e é proporcional à:

$$\frac{m^{(1)}}{\rho D^2} = \frac{\text{massa por unidade de comprimento da estrutura}}{\text{densidade do fluido} \times \text{dimensão da estrutura}} \quad (\text{III.9})$$

Este parâmetro proporciona uma medida dos efeitos de flutuação e inércia da estrutura em relação ao fluido, todavia, é usado para medir a susceptibilidade da leveza da estrutura, as vibrações induzidas pelo fluxo. Se esta relação diminuir, existirá um forte indício de propensão, da estrutura vibrar.

---

(<sup>1</sup>) inclui a massa estrutural, mais a adicional

### III.9-11 - Número de Strouhal (S)

É a constante de proporcionalidade entre a frequência da formação de vórtices ( $f_s$ ) e a velocidade da corrente livre ( $U$ ), dividida pela largura do corpo ( $D$ ).

$$f_s = \frac{SU}{D} \quad (\text{III.10})$$

O número de Strouhal é função da geometria do corpo, e  $Re$ , para baixos números de Mach.

A Figura III.9 mostra relação do número de Strouhal versus Reynolds para um corpo cilíndrico circular.

Na transição de ( $Re$ ), a frequência de desprendimento é definida em termos da frequência dominante na ampla faixa de frequências de desprendimento.

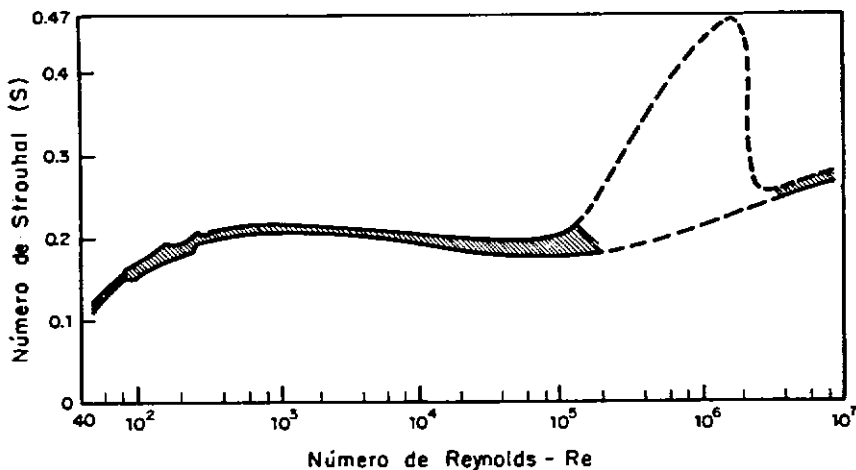


FIG. III.9 - Números de Strouhal em função de  $Re$  para um cilindro circular.

### III.9-12 - Fator de Amortecimento ( $\zeta$ )

A energia dissipada pela estrutura na sua vibra

ção é caracterizada por

$$\zeta = \frac{\text{energia dissipada por ciclo}}{4\pi \times \text{a energia total da estrutura}} \quad (\text{III.11})$$

onde

$$\zeta = \text{taxa de amortecimento.}$$

Para o amortecimento viscoso linear da estrutura,  $2\pi\zeta$  é igual ao logarítmo natural de duas amplitudes sucessivas na curva de decaimento livre.

Se a energia fornecida é menor que a energia dissipada pelo amortecimento, as vibrações provocadas pelo fluxo tendem a diminuir.

Uma outra variável interessante é a chamada amortecimento reduzido ( $\delta r$ ), e é formada pelo produto da relação de massa e o fator de amortecimento

$$\delta r = \frac{2m(2\pi\zeta)}{\rho D^2} \quad (\text{III.12})$$

com o crescimento de  $\delta r$ , se reduz as vibrações introduzidas pelo fluxo.

### III.9-13 - Constatação

Entre tantas variáveis, a experiência tem mostrado, que do grupo de variáveis adimensionais anteriormente apresentadas, as abaixo referidas, têm tido sucesso na descrição do problema específico da vibração de estruturas elásticas, submetidas ao escoamento de um fluido.

São eles: a geometria, a amplitude adimensional, o parâmetro de massa, o número de Reynolds, a velocidade reduzida

e o fator de amortecimento.

Do que foi visto nesta seção; se dado o enfoque da interação fluido-estrutura, voltado a atender estruturas relativamente flexíveis sujeitas a um fluxo fluídico, onde muitos dos efeitos anteriormente anunciados têm suas manifestações, seria conveniente estabelecer uma dependência da amplitude do movimento da estrutura e sua dimensão característica, em relação ao grupo destas variáveis adimensionais, isto é:

$$\frac{Ae}{D} = F \left( \frac{\ell}{D}, \frac{UD}{U}, \frac{U}{fD}, \frac{m}{\rho D^2}, \zeta \right) \quad (III.13)$$

onde então, a amplitude adimensional  $\left(\frac{Ae}{D}\right)$  forneceria uma medida importante para a caracterização dos efeitos vibratórios.

### III.10 - DESPRENDIMENTO DE VÓRTICE DEVIDO A AÇÃO DA ONDA

#### III.10-1 - Introdução

Os vórtices são desprendidos na passagem da onda por uma estrutura. A flutuação das forças transversais que resultam, podem ser da mesma ordem de grandeza das forças da onda na direção desta. O problema tem sido investigado para casos particulares<sup>(2)</sup>, e os resultados utilizados em outras situações; daí porque, a resposta dinâmica, ainda não é bem conhecida [41]. O coeficiente de sustentação  $C_L'$  e sua frequência  $f_s'$  para a qual a onda atua com uma frequência  $f_\omega$  dependem dos parâmetros:

$$N_{kc}, \quad Re \quad e \quad kh$$

onde

---

(<sup>2</sup>) Estruturas cilíndricas verticais, em ondas bi-dimensionais ocorrendo em águas rasas.

$$C_{L'} = \frac{F_{s'}}{\frac{1}{2} \rho (U_m)^2 D \cdot h} \quad (III.14)$$

como  $Re$  envolve  $U_m$ , que pode ser calculado para cada condição de onda associada a largura da estrutura, é conveniente dar  $Re$  em função de um parâmetro que dependa do período da onda, este parâmetro é dado por:

$$\text{Parâmetro de frequência} = P_f = \frac{D^2}{\nu T} \quad (III.15)$$

logo, o número de Reynolds e Keulegan-Carpenter ficam relacionados por:

$$Re = P_f N_{kc} \quad (III.16)$$

O número de Keulegan-Carpenter é um parâmetro indicador, de quando a força de sustentação aparece. Trabalhos experimentais têm mostrado que o desprendimento de vórtices causadores da sustentação, surgem quando  $N_{kc} > 5$ . (Isaacson - 1974).

### III.10-2 - Frequência da Força de Sustentação

A relação  $f_{s'}/f_{\omega}$  (é um valor inteiro) e primeiramente dependente de  $N_{kc}$ , e depois de  $Re$ . Num gráfico  $f_{s'}/f_{\omega}$  versus  $N_{kc}$ , o menor valor para a relação de frequência ( $=2$ ) estaria para  $N_{kc} \simeq$  entre 5 e 16, com o crescimento de  $N_{kc}$  a relação também cresce (linearmente). O parâmetro  $kh$ , também diz sobre a variação da força de sustentação com a profundidade. Para água profundas  $kh > \pi$  o fluxo ao longo da estrutura é altamente tridimensional, com forças de sustentação relativamente pequenas, o que não acontece em águas rasas.

### III.10-3 - Coeficiente de Sustentação ( $C_L$ )

O máximo valor de  $C_L$  ocorre quando da passagem da onda. Na prática a maior força de sustentação tende a ocorrer no instante da máxima velocidade, e todavia, coincide com a maior força alinhada na estrutura, em que a força de arraste predomina sobre a de inércia.

Os efeitos das respostas sobre estruturas cilíndricas, devido as forças oriundas do desprendimento de vórtices, que ocorrem num fluxo permanente, não são bem conhecidos para o caso de ondas, contudo existem indícios que sejam menores, mas tal fato não é provado.

### III.11 - ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICE

Quando a velocidade do fluxo aumenta ou diminui, de modo que a frequência do desprendimento se aproxima da frequência natural da estrutura, o desprendimento dos vórtices, simultaneamente sincroniza-se com a frequência da estrutura. A sincronização da oscilação ressonante de perto da esteira, introduz energia na estrutura, de modo que vibrações de grande amplitude podem ser produzidas. As ressonâncias com espalhamento de vórtice ocorrem perto de uma velocidade reduzida de 5, que corresponde ao número de Strouhal de 0,2. Vibrações, também, têm sido observadas para sub-harmônicos e super-harmônicos da frequência de desprendimento, mas estas tendem a ser bem menores que a amplitude observada na ressonância fundamental. Se vibrações paralelas ao fluxo têm lugar, elas serão esperadas perto da velocidade reduzida de 2,5, porque dois ciclos de pressões oscilatórias paralelas à corrente livre são produzidas para ciclo normal da corrente livre. Três harmônicas vibrações induzidas por vórtices em pilares marítimos aparecem para a velocidade reduzida de 1,2; e tem sido observado o desprendimento simétrico de vórtices, mais que no usual modelo oscilante.

Seria desejável para uma predição analítica, que

as amplitudes induzidas pelos vórtices, usassem as superfícies de pressão sobre o cilindro, que são obtidas de uma análise do campo de fluxo. O ideal seria uma solução da equação de Navier-Stokes dependente do tempo, em presença da estrutura vibrante; e a separação de fluxo, formação de vórtice emergiria naturalmente desta solução; e as pressões e o carregamento cizalhante sobre a superfície da estrutura proviriam de uma função forçada do acoplamento do movimento da estrutura. Algumas soluções numéricas para o campo de fluxo têm sido ativadas pelo uso de computadores digitais, estas soluções tem sido limitadas, para estruturas estacionárias e número de Reynolds baixo, onde o fluxo é laminar, ou para soluções onde a viscosidade é desprezada.

A análise integrada para ambos, o campo de fluxo e o movimento da estrutura não é avaliável para a maioria dos casos. Todavia, modelos limitados têm sido desenvolvidos para se descrever esta interação fluido-estrutura. Ainda que estes modelos não resolvam a equação de Navier-Stokes dependente do tempo, eles têm incorporado muitos dos efeitos dinâmicos, que tem sido experimentalmente observados. Dois modelos tentando reproduzir os efeitos das vibrações induzidas por vórtices sobre estruturas são apresentados por Blevis [12]. Nenhum deles pode ser aplicado a seções não circulares, ou vibrações paralelas ao fluxo.

Experimentos realizados em cilindros estacionários indicam que forças oscilantes paralelas ao fluxo numa estrutura cilíndrica, são de 7% a 8% daquelas ocorridas normais ao fluxo. Estes modelos, são essencialmente, métodos para se estenderem dados experimentais avaliáveis; e não se constituem em aproximações rigorosas da verdadeira interação fluido-estrutura. Todavia, eles servem utilitariamente para estimar as respostas em estruturas cilíndricas circulares, a ressonância, para vibrações induzidas por vórtices num intervalo de Reynolds entre  $10^3$  a  $10^5$ .

O primeiro destes modelos é o do oscilador de



esteira; retratando a esteira como um oscilador não linear auto-excitador acoplado à estrutura. O segundo modelo é designado para estimar os efeitos de correlação que tem uma grande influência sobre as vibrações de pequenas amplitudes induzidas pelos vórtices.

### III.12 - MÉTODOS DE PREVENÇÃO DAS OSCILAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES

Aqui são apresentados os três mais importantes:

- 1) Por um controle do projeto estrutural se garante que valores críticos de  $U_m/ND$  no fluxo permanente e  $f_s'/f_w$  em ondas não é excedido;
- 2) No projeto estrutural se assegura valores suficientemente altos da massa efetiva e amortecimento próprio. Este critério não é sabido para desprendimento de vórtices induzidos por ondas;
- 3) Por modificações do fluxo, quer por divergência ou aproximação do mesmo, ou por modificação da forma da estrutura.

#### III.12-1 - Controle de $U_m/N.D$

As propriedades da estrutura são escolhidas de forma que os valores críticos de  $U_m/N.D$  e  $f_s'/f_w$  (para ondas) não sejam ultrapassados. É geralmente o processo mais satisfatório, mas pode ser só inicialmente econômico, num estágio de projeto. Deste modo as altas frequências naturais, ou um grande diâmetro da estrutura é requerido para oferecer segurança em obras n'água. Estas altas frequências podem ser conseguidas, usando-se estruturas de grandes diâmetros, com isto tem-se um duplo benefício. Uma outra alternativa para aumentar as frequências seria contraventar a estrutura entre suas partes.

Outra maneira seria a mudança da forma da seção, de circular para quadrada ou retangular, com isto se aumenta a velocidade crítica do fluxo, o que não é recomendado, além da atuação do arraste ser mais intensa nestas seções. Outras formas de seção, também podem ter o inconveniente de apresentar outros tipos de oscilação, que não ocorrem na circular.

### III.12-2 - Massa, Amortecimento e Forma da Seção

O crescimento do parâmetro de massa  $\bar{m}/\rho D^2$  e/ou o parâmetro de amortecimento ( $\delta$ ) reduz as amplitudes de oscilação, e se seus valores são grandes o movimento fica completamente suprimido.

O aumento da massa da estrutura diminui os efeitos de oscilação, mas pode reduzir as freqüências naturais, inclusive levando à freqüências perigosas.

Aumento do amortecimento reduzido: se a massa e o amortecimento interno da estrutura tendem a aumentar, então as vibrações ressonantes devem diminuir. O aumento do amortecimento pode ser conseguido, pelo atrito entre os elementos estruturais; usando-se materiais compostos, tal como concreto, em vez de aço soldado; materiais com alto amortecimento interno, como madeira, borracha e areia, ou usando amortecedores externos, ou pára-choques. Simples procedimentos para a dissipação de energia podem ser muito efetivos.

Evitar a ressonância: Se a velocidade reduzida estiver abaixo de um,  $U_m/N.D < 1$  onde  $N$  = a freqüência natural da estrutura (Hz), então a ressonância com o desprendimento de vórtice através do terceiro harmônico é evitada. Isto é ordinariamente conseguido pelo endurecimento da estrutura com fios guiados ou ganchos, para aumentar a freqüência natural. Este endurecimento não é prático para estruturas grandes e complexas;

Mudança da Seção Transversal: Se a estrutura po

de ser delineada na corrente, então o fluxo pode não se separar e o desprendimento de vórtice eliminado. Este delineamento somente será efetivo se o ângulo do fluxo relativo à estrutura for constante. Um pequeno desvio provocará grandes variações laterais. Alguns sucessos têm sido conseguidos através do uso de estrias helicoidais sobre a superfície da estrutura, ou mesmo placas pequenas colocadas em certos intervalos. No entanto, alguma irregularidade próxima da esteira da estrutura provavelmente romperá o desprendimento regular de vórtices. Todavia, estes recursos podem aumentar consideravelmente o arraste.

### III.13 - Exemplo Simples

Seja uma torre de concreto armado e seção vazada constante, com comprimento de 73,2 m e diâmetro de 4,1 m, fixa na extremidade inferior no leito do oceano, numa lâmina d'água de 60,4 m; sujeita a uma onda de projeto de altura  $H = 10$  m e período  $T = 10$  s.

Sejam os dados e parâmetros <sup>(3)</sup>

$A_s = \text{área da seção} = 7,97 \text{ m}^2$	
$h = 60,4 \text{ m}$	$E = \text{módulo de elasticidade} = 4,1 \times 10^9 \text{ Kg/m}^2$
$H = 10 \text{ m}$	$\rho_e = \text{densidade da estrutura} = 2483 \text{ kg/m}^3$
$T = 10 \text{ s}$	$\rho_a = \text{densidade da água do mar} = 1031 \text{ kg/m}^3$
$L \approx 154 \text{ m}$	$I = \text{momento de inércia} = 11,7 \text{ m}^4$
$K = 0,041$	$K_a = \text{parâmetro de espalhamento} = 0,084$
$\omega = 0,628 \text{ rds/s}$	$K_h = \text{profundidade relativa} = 2,5$
$f_\omega = 0,1 \text{ Hz}$	$\bar{m} = m_e + m_{ad} = 19.801 + 13.612 = 33.413 \text{ Kg/m}$
$\ell = 73,2 \text{ m}$	$e = \text{espessura da parede} = 0,76 \text{ m}$

---

(3) Os cálculos de grandezas não fornecidas no enunciado, foram realizadas por programações via computador, realizadas no trabalho.

As freqüências naturais da torre estão na Tabela III-1, cujos valores foram obtidos pelo Programa Lorane ]<sup>99</sup>[

MOD0	Freq. Nat. (vácuo) (Hz)	Freq. Nat. (�gua) (Hz)	Freq. Onda/ Freq. Nat. n'água	$\frac{U_m}{N_i D}$
1	0,583	0,514	0,195	1,52
2	3,565	2,965	0,034	0,26
3	9,612	7,772	0,013	0,10
4	14,712	12,278	0,008	0,064
5	17,902	14,387	0,007	0,054

Tabela III-1

Supondo que o período da onda seja suficientemente grande, a ponto de se poder considerar o fluxo como permanente, para a situação mais desfavorável; tem-se os parâmetros:

$$U_{\max} = U_m = \frac{Agk}{\omega} = \frac{5 \times 9,81 \times 0,041}{0,628} = 3,20 \text{ m/s}$$

$$Re^{\max} = \frac{U_m D}{\nu} = \frac{\pi H}{T} \frac{D}{\nu} = \pi \times \frac{4,10}{1,11 \times 10^{-6}} = 1,2 \times 10^7$$

$$N_{kc} = \frac{U_m T}{D} = \frac{\pi H}{D} = 7,7 \quad (\text{Keulegan-Carpenter})$$

$$\frac{\bar{m}}{\rho_a D^2} = \frac{33.413}{1031 \times 4,1^{-2}} = 1,93 \quad (\text{Parâmetro de massa})$$

para um amortecimento estrutural  $\delta = 0,05$

Tem-se:

$$\frac{2 \bar{m} \delta}{\rho_a D^2} = 2 \times 1,93 \times 0,05 = 0,193 \quad (\text{amortecimento reduzido})$$

Se  $\frac{2 \bar{m} \delta}{\rho_a D^2} > 1,8$  condição que exige a possibilidade de excitação na direção do fluxo, e  $\frac{2m\delta}{\rho_a D^2} > 10$  (na transversal ao mesmo) [41].

O amortecimento reduzido é pequeno, não atendendo as condições acima. Esta verificação conduziria a se pensar num leve indício, de que a torre poderia oscilar devido ao fluxo, todavia, outras condições mais fortes devem ser garantidas.

A ressonância com o desprendimento de vórtices para o regime subcrítico de  $Re$  é esperado próximo de:

$$= 10,53 \text{ m/s} \quad (1^\circ \text{ modo})$$

$$U = \frac{N_i D}{S} = N_i \cdot \frac{4,10}{0,2} = 60,78 \text{ m/s} \quad (2^\circ \text{ modo})$$

$$= 159,33 \text{ m/s} \quad (3^\circ \text{ modo}) \quad \dots$$

como a velocidade máxima do fluxo é 3,20 m/s, não existirá a possibilidade de ressonância, pois as velocidades requeridas para tal, ao fluxo, são todas superiores; ou de uma forma análoga, sabe-se que a condição de ressonância ocorre para velocidade reduzida de  $\approx 5$

$$\bar{U}_{\text{crit.}} \approx 5 ND \quad \left( \frac{U}{N \cdot D} = \frac{1}{S} = \frac{1}{0,2} = 5 \right)$$

a última coluna da Tabela III-1 efetua esta verificação.

### III.14 - UM ENSAIO PARA A ANÁLISE FÍSICA E INTUITIVA DO PROBLEMA INTERAÇÃO ONDA-ESTRUTURA

Na propagação livre de ondas de superfície, o efeito de viscosidade da água é desprezível, conforme demonstrou Aranha (1979) [163], quer para a fina camada-limite do fundo ou da superfície livre; sendo que este efeito só se tornará sensível, após a onda percorrer uma distância bem maior do que seu próprio comprimento de onda. Quando o fluido encontra um objeto não delgado, ocorre, devido à viscosidade, o fenômeno da separação, facilmente reconhecido no caso de escoamento uniforme, como aquela região turbulenta que aparece na parte posterior do corpo. Em um escoamento uniforme é necessário que se leve algum tempo até que a zona turbulenta seja formada e estabilizada. Devido ao caráter oscilatório associado a propagação de ondas, o fenômeno da separação pode não ocorrer, se o período for curto o suficiente de forma a não permitir a formação da região viscosa na parte posterior do corpo. Período "curto" implica em comprimento de onda "curto", ou seja: a separação não ocorre quando o comprimento de onda incidente ( $L$ ) é pequeno quando comparado com as dimensões do corpo ( $D$ ), isto é,  $Ka \gg 1$ .

Em resumo: o efeito da viscosidade pode ser ignorado quando o corpo for grande, isto é, quando a sua dimensão característica for da ordem de grandeza ou maior que o comprimento da onda incidente ( $ka \geq 0(1)$ ).

A superfície livre, por sua vez, é uma fonte de não linearidade; pois, sua forma depende da dinâmica do fluido, que por sua vez depende das condições de contorno impostas na superfície livre. Para uma onda se propagar na ausência de qualquer estrutura, as únicas dimensões características são  $A$  e  $L$ , a amplitude e o comprimento de onda respectivamente. Parece claro que se  $A/L \ll 1$  (onda de pequenas amplitudes) a superfície livre pode ser aproximada, sem maiores erros, pelo plano  $y = 0$ . Isto é, matematicamente falando, que nestas condições ( $A/L \ll 1$ ) as equações podem ser linearizadas.

No presente estudo, julga-se basicamente importante a preocupação de se entender fisicamente o problema em questão, isto é, de se entender quais são os parâmetros importantes na interação onda-estrutura.

Esta análise pode ser iniciada com uma afirmação de caráter geral: é de se esperar a máxima interação da onda incidente com o corpo, quando  $ka \sim 0(1)$ . De fato, se  $ka \ll 1$  (estruturas delgadas) a onda praticamente não sente a presença do corpo, e portanto quase não se espalha, o que implica numa fraca interação. De outro lado, se  $ka \gg 1$  (corpo muito grandes) a onda vê o corpo como se fosse uma enorme parede sólida que reflete, transmite, porém espalha muito pouco a onda incidente. Diante disso, o entendimento físico do processo de interação cria a expectativa de zonas de baixo espalhamento da onda,  $ka \ll 1$  e  $ka \gg 1$ .

#### III.14-1 - Efeito da Viscosidade Devido a Presença da Estrutura nas Ondas

Como foi dito anteriormente, na propagação livre de ondas, a viscosidade pode ser desprezada.

Em um escoamento uniforme ( $\underline{V}(x, y, t) = u \underline{i}$  para  $x \rightarrow \pm \infty$ ,  $u = \text{constante}$ ), a presença de corpos afeta o escoamento dependendo das características geométricas do corpo. Assim, corpos delgados, perturbam muito pouco o escoamento potencial. De fato, forma-se na superfície livre do corpo uma camada estreita que gera vórtices, camada esta que se mantém aderente ao corpo (não existe separação) e cujo efeito global, como será visto no Capítulo IV, é introduzir uma circulação no escoamento potencial, no caso de corpo não simétrico. Para corpos não delgados a camada separa-se, dando origem a um escoamento turbulento na parte posterior do corpo. Esta região da turbulência é suficientemente grande de forma a não permitir que os resultados obtidos através da teoria potencial sejam válidos. Neste caso, o único modelo matemático correto é aquele associa

do aos fluidos viscosos (equação de Navier-Stokes).

As estruturas que serão futuramente analisadas, nem todas, são de grandes dimensões. O escoamento associado à propagação de ondas não é uniforme, mas sim oscilatório, de fato:

$$U(x, t) = U_m \sin(kx - \omega t)$$

onde

$$U_m \approx 0\left(\frac{gAk}{\omega}\right)$$

Para se entender como o caráter oscilatório modifica o comportamento do escoamento, considere-se o caso de um corpo imerso em um fluido e inicialmente em repouso. O objetivo é caracterizar os vários tipos de escoamento que ocorrem quando este corpo é acelerado.

Inicialmente, o escoamento é potencial e assim continua por um tempo extremamente curto. Após o corpo ter se movido a uma distância da ordem de grandeza do seu diâmetro, a camada limite começa a se separar e concomitantemente a região turbulenta na parte posterior começa a ser formada. A este tempo o escoamento não é mais potencial e o modelo para fluido viscoso deve ser usado. Seja  $T'$  o tempo característico para que a camada comece a se separar do corpo. Um a velocidade média do corpo, e  $(a)$  a sua dimensão característica. Pelo exposto acima  $T' \approx 0\left(\frac{a}{U_m}\right)$ . Em um escoamento oscilatório, com período  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , define-se o adimensional

$$\frac{T'}{T} = \frac{a}{U_m T}$$

Considere-se primeiramente, que este adimensional seja muito grande ( $T' \gg T$ ). Nestas condições, muito antes da camada limite ter se separado do corpo, o fluxo já inverteu sua direção. Da mesma forma não existe separação com o fluxo



na direção invertida; e portanto, para  $\frac{T'}{T} \gg 1$  não existe separação e o escoamento deve ser potencial. Por razões análogas, se  $T' \ll T$  o fenômeno de separação é relevante, e o escoamento não é potencial.

O caso  $T' \ll T$  corresponde a períodos longos e portanto, o comprimento da onda  $L = \frac{2\pi}{k}$  longo, ou seja  $ka \ll 1$ : nas vizinhanças do corpo a dimensão característica é  $(a)$ , o tempo característico é  $\sqrt{\frac{a}{g}}$ . Definindo-se  $\hat{x} = \frac{x}{a}$ ,  $\hat{t} = \sqrt{\frac{g}{a}} t$ , e usando a relação de dispersão para águas profundas  $\frac{\omega^2}{g} = k$ , obtem-se:

$$U(u, t) = U_m \cdot \text{sen} \left[ (ka) \hat{x} - \sqrt{ka} \cdot \hat{t} \right]$$

portanto,

$$\frac{U_x}{U} \approx 0 \quad (ka) \ll 1, \quad \frac{U_t}{U} \approx 0 \quad (\sqrt{ka}) \ll 1$$

e  $U(x, t)$  é praticamente uniforme quando  $ka \ll 1$ . Como o corpo é muito pequeno a onda não sente a sua presença e o fenômeno do espalhamento é irrelevante; resumindo: quando  $ka \ll 1$  o efeito onda não existe, o escoamento é basicamente uniforme, a separação ocorre e portanto, o escoamento não é potencial, e as forças no corpo devem ser basicamente próxima daquelas existentes quando o mesmo corpo é posto em uma corrente uniforme.

A questão prática é tentar determinar quão grande deve ser o corpo para que não ocorra a separação ( $T' \ll T$ ) e o escoamento possa ser considerado pontencial. Como  $U_m \approx 0 \left( \frac{gAk}{\omega} \right)$  obtem-se:

$$\frac{T'}{T} = \frac{a}{\frac{gAk}{\omega} \cdot \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ka}{kA} \right) \quad (\omega^2 = gk)$$

para ondas de pequenas amplitudes ( $ka \ll 1$ ),  $T' \gg T$  se  $ka \geq 0(1)$ . Isto é, corpos grandes são aqueles para os quais ( $ka$ ) são da ordem de grandeza igual ou maior que um. Esta análise é uma derivação do trabalho de Keulegan-Carpenter, que criaram o adimensional ( $N_{kc} = \frac{U_m T}{D}$ ) e mostrado foi, que para  $\frac{U_m T}{D}$  pequeno, ( $\frac{T'}{T}$  grande) o escoamento é praticamente potencial. Na realidade, eles verificaram que para  $\frac{U_m T}{a} < 3$  a separação não era mais notada, e que as forças medidas estavam de acordo com a teoria potencial.

## CAPÍTULO IV

### FORÇAS PROVOCADAS PELA AÇÃO DAS ONDAS SOBRE ESTRUTURAS DELGADAS

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

O uso frequente de construções constituídas por partes delgadas, em estruturas no mar ("*off shore*"), inevitavelmente conduz a consideração do efeito de interação da onda com a estrutura. O problema básico é prever as forças sobre a estrutura, devido ao campo do fluxo associado à onda. Estes fluxos são complexos, e quase sempre supõem-se que a estrutura estivesse ausente. As soluções apresentadas, levam em conta certos coeficientes empíricos, que aumentam as formulações teóricas sobre o problema.

O processo de avaliação destas forças, pressupõe o atendimento de uma série de considerações implícitas ao mesmo, para que seu uso seja válido, como será visto mais adiante. Este campo das forças de onda, só é possível se o movimento da onda não é afetado pela presença da estrutura, isto é, a estrutura se apresenta transparente à onda e, esta por sua vez não se deforma.

E para que isto ocorra, é necessário que as dimensões da estrutura (a) sejam pequenas, quando comparadas com o comprimento da onda (L), isto é,  $Ka < 2\pi/10$ ; conforme se concluirá no Capítulo VI.

Será desenvolvido neste Capítulo, um procedimento para o cálculo das forças da onda sobre estruturas, expresso como uma soma linear de termos, um devido à inércia e outro devido ao arraste  $|^{116}|$ . Apesar deste procedimento não possuir uma base física muito consistente<sup>(1)</sup>, se constitui numa aproximação

---

(1) Será justificado no trabalho este ponto de vista.

mação amplamente aceita na prática da Engenharia. Será também mostrado que estas componentes são definidas em termos do campo cinemático das partículas dos fluidos. E o procedimento para avaliação das forças é dividido em duas fases: 1) Cálculo do campo cinemático do fluxo na onda; e 2) As forças e o campo cinemático do fluxo são relacionados por meio de dois coeficientes de força hidrodinâmica ( $C_m$  e  $C_D$ ).

São também apresentados considerações sobre estes coeficientes empíricos, as forças transversais, e ao movimento da estrutura.

#### IV.2 - FORMULAÇÃO DE MORISON POR UMA CONSIDERAÇÃO DE ENERGIA CINÉTICA

##### IV.2-1 - Cilindro com Movimento Uniforme Acelerado, num Fluido em Repouso

Quando um corpo de massa  $M$  se move com uma velocidade  $U$  num fluido em repouso, sua energia cinética ( $E_c$ ) será

$$E_c = \frac{1}{2} M U^2 \quad (IV.1)$$

Este corpo induz automaticamente um movimento no fluido, ao seu redor (perturbação), que tende a desaparecer, à medida que a distância que o separa do corpo tende ao infinito ( $r \rightarrow \infty$ ).

A lei que rege o decaimento do movimento do fluido depende da forma do corpo; e longe deste pode-se dizer que as velocidades das partículas  $V(x, y, t)$  decrescem com  $1/r^2$

$r$  = distância do centro do corpo ao ponto considerado.

$E_c$  total do fluido circundando o corpo ( $E_c^f$ ) (e que se pertur

ba) será:

$$E_c^f = \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \frac{1}{2} \rho V_{(x, y, t)}^2 dA \quad (\text{IV.2})$$

lim = limite do corpo

dA = área elementar

$E_c$  total do sistema será equação (IV.1) + (IV.2):

$$E_c = \frac{1}{2} V^2 \left[ M + \rho \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \left( \frac{V}{U} \right)^2 dA \right] \quad (\text{IV.3})$$

a quantidade  $\rho \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \left( \frac{V}{U} \right)^2 dA$  tem dimensão de massa e é chamada massa adicional

$$M' = \int \int_{\text{lim}}^{\infty} \left( \frac{V}{U} \right)^2 dA \quad (\text{IV.4})$$

$M'$  = massa do fluido que se movendo com velocidade  $U$ , teria a mesma energia cinética de toda a massa fluida.

Sabe-se que a energia cinética é igual ao trabalho necessário para dar ao corpo uma velocidade  $U$ , ou então, para pará-lo. Este trabalho também inclui o trabalho necessário para mover o fluido em redor do corpo  $\Rightarrow \frac{1}{2} M' U^2$

Este trabalho seria contínuo para efetuar o percurso através de um fluido perfeito, com  $U$  = constante.

Como:

$V_{(x, y, t)}$  decresce com  $r^{-2}$ ,

$\left( \frac{V}{U} \right)^2$  variará com distância em  $r^{-4}$  e a integral de  $dA$  com  $r^2$

Conseqüentemente a integral para  $M'$  tem um valor finito.

Para o caso geral  $M'$  é função do valor absoluto de  $U$  e por extensão do número de Reynolds  $UD/\nu$  e outro parâmetro empírico caracterizando o fluxo  $\frac{UT}{D}$  (número de Keulegan-Carpenter. Logo  $M'$  será também em geral, função do tempo.

Porém, para fluidos perfeitos tem-se:

$$\frac{V(x, y, t)}{U} \quad \text{independe de } U, \text{ e somente do } \underline{\text{mo}} \text{ delo do fluxo.}$$

Se  $V(x, y, t)$  for referida a um sistema de coordenadas móveis no corpo (com velocidade  $U$ ) ( $\frac{V}{U}$ ), também, independem do tempo. Então, a integral do coeficiente ( $\frac{V(x, y, t)}{U}$ ) independe de  $U$  e  $t$ , isto é,  $M'$  é apenas uma constante associada com o corpo e a massa específica do fluido; como o sistema se move com o corpo à mesma velocidade, a energia cinética do corpo neste sistema não precisa ser considerada; pois, para todos os efeitos o corpo se encontra parado; e a  $E_c$  total será dada só pela parcela do fluido perturbado.

Por outro lado, podemos associar este movimento, a superposição de dois escoamentos: escoamento retilíneo uniforme + dipolo

$$\phi = \phi_{e.r.u} + \phi_{\text{dipolo}} \quad \text{---} \quad (IV.5)$$

Sendo que o dipolo é que simula a perturbação no meio

$$\phi_{\text{dip}} = \frac{UR^2}{r} \cos \theta$$

$$E_c^{\text{dip}} = \int_m \frac{V^2}{2} dm = \int_v \frac{V^2}{2} \rho dv = \frac{\rho}{2} \int_v (\nabla \phi_{\text{dip}})^2 dv \quad (IV.6)$$

$$E_c^{dip} = \frac{\rho}{2} \int_U u^2 R^4 \left| \nabla \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \right|^2 dU$$

$$\boxed{M' = \rho R^4 \int_U \left| \nabla \frac{\cos \theta}{r} \right|^2 dU} \quad (IV.7)$$

- Forças para o Corpo em Movimento:

$$\underline{F} = \underline{F}_c + \underline{F}_f \quad (IV.8)$$

$F_c$  = forças de inércia do corpo;

$F_f$  = forças de inércia do fluido circundante

$$\underline{F} = M \frac{d\underline{U}}{dt} + \rho \iiint \lim_{\infty} \frac{d\underline{V}}{dt} dU \quad (IV.9)$$

$$F_f = \iiint \rho \frac{d\underline{V}}{dt} dU \quad (IV.10)$$

onde

$$\frac{d\underline{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (\nabla \phi) = \nabla \frac{d\phi}{dt} \quad (IV.11)$$

Sabemos que:

$$\phi = U_{(t)} \left[ 1 + \frac{R^2}{r} \right] \cos \theta \quad (IV.12)$$

e

$$\underline{F} = (M + M') \frac{d\underline{U}}{dt} \quad (IV.13)$$

onde se chega a:

$$M' = \frac{\rho (d/dt) \iiint \lim_{\infty} V dV}{d\underline{U}/dt} \quad (IV.14)$$

A equação (IV.14) é obtida multiplicando-se e dividindo-se a equação (IV.10) por  $d\underline{U}/dt$ .

A princípio (IV.14) parece ser diferente da Eq. (IV.4) o que não é verdade.

Quando  $r \rightarrow \infty$ , temos certas dificuldades para avaliar a integral  $^{109}$ , e tentando-se contornar este problema, para o caso do corpo se movendo no fluido em repouso,  $F' = M' d\underline{U}/dt$  poderá ser determinada pela força exercida pelo fluido sobre o corpo, que é a mesma, que o corpo exerce sobre o fluido, que será:

$$F' = \iint_S p \cos \Psi ds$$

(IV.15)

$p$  = pressão ao redor do corpo

$\Psi$  = ângulo que normal a  $ds$  forma com a direção do movimento

$S$  = área do corpo

Conhecido  $\underline{V}$  ou  $\phi$ ,  $p$  pode ser determinada por Bernoulli.

Em geral a integral de  $\rho \frac{V^2}{2}$  será zero (paradoxo de D'Alambert) e a integral de  $\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$  é significativa. Isto é:

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{1}{2} V^2 - \rho g z \quad (IV.16)$$

pressão hidrodinâmica
pressão estática



$$\text{pressão hidrodinâmica} = - \frac{\rho \partial \phi}{\partial t} \therefore p = - \frac{\rho \partial \phi}{\partial t} \quad (\text{IV.17})$$

e, finalmente (IV.17) em (IV.15):

$$M' = - \iint \frac{\rho (\partial \phi / \partial t) \cos \psi \, ds}{d \underline{U} / dt} \quad (\text{IV.18})$$

também a igualdade força-momentum pode também ser obtida por diferenciação da igualdade trabalho-energia.

$$E_c = \frac{1}{2} (M + M') \underline{U}^2 \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{d(E_c)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (M + M') \underline{U}^2 \right] \quad (\text{IV.20})$$

potência = variação da energia cinética

$$\frac{d w}{dt} = \frac{d(E_c)}{dt} = F \frac{d L}{dt} \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{d(E_c)}{dt} = (M + M') \underline{U} \frac{d \underline{U}}{dt} = F \frac{d L}{dt} \quad (\text{IV.22})$$

velocidade

ou por outro lado, sabe-se que o produto da força que acelera o corpo multiplicada pela velocidade representa a potência gasta. Esta potência deve ser igual a taxa de crescimento da Energia Cinética no tempo. Ou seja:

$$\underline{F} \cdot \underline{U} = \frac{d(E_c)}{dt} = (M + M') \underline{U} \frac{d \underline{U}}{dt}$$

$$\underline{F} = (M + M') \frac{d \underline{U}}{d t} \quad (\text{IV.23})$$

$$\underline{F} = (M + M') \frac{d \underline{U}}{d t} = M^* \frac{d \underline{U}}{d t} \quad (\text{IV.23a})$$

onde  $M^*$  é chamada massa virtual.

Assim a presença do fluido pode ser tratada como um efetivo crescimento da massa do corpo, com o propósito de determinar-se a força total de aceleração do mesmo.

A força devido a adição de massa, será a reação entre o corpo e o fluido, que é igual a integral sobre a superfície do corpo da componente da força de pressão na direção do movimento (Eq. IV.15). Seria uma espécie de força extra presente, se o corpo fosse acelerado no vácuo. E a resultante da força atuando no fluido, varia a energia cinética do fluido. Ela desaparece se a velocidade  $U = \text{constante}$ .

Da Equação IV.22, tem-se:

$$F \frac{DL}{Dt} = (M + M') \underline{U} \frac{dU}{dt} \quad (\text{IV.24})$$

Visto que  $\frac{dL}{dt} = U$ , a igualdade força-momentum é obtida:

$$M' = \text{constante} \quad \text{e} \quad dF/dt = 0$$

logo:

$$M' = \rho \iiint \left( \frac{V}{U} \right)^2 dV \quad (\text{IV.25})$$

ou para fluxo irrotacional

$$M' = - \frac{\int \int \rho (\partial \phi / \partial t) \cos \Psi \, ds}{d \underline{U} / d t} \quad (IV.26)$$

$M'$  será usado para o cálculo de  $F_f$ :

$$F_f = M' \frac{d \underline{U}}{d t} \quad (IV.27)$$

### APLICAÇÃO

Seja um cilindro circular de raio  $R$  se movendo num fluido.

O potencial de velocidade dado para um cilindro se movendo através de um fluido em repouso é dado pela superposição de um modelo de fluxo permanente ao redor do cilindro + uma velocidade uniforme  $U$ .

$$\phi = -u \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + ur \cos \theta \quad (IV.28)$$

Vemos que o fluxo uniforme cancela-se, restando apenas o dipolo para  $\phi$

$$\phi = -U \frac{R^2}{r} \cos \theta \quad (IV.29)$$

o módulo da velocidade para algum ponto do fluido será:

$$V^2 = \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (IV.30)$$

$$V^2 = \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{u R^2}{r} \sin \theta \right)^2 + \left( \frac{u^2 R^4}{r^4} \cos^2 \theta \right) \right] = \frac{U^2 R^4}{r^2}$$

ou seja:

$$V(r, \theta, t) = \frac{R^2}{r^2} U(t) \quad (\text{IV.31})$$

onde  $u(t)$  é a velocidade do corpo.

A energia cinética total do fluido por unidade de comprimento do cilindro será:

$$E_c^f = \int_m dm \frac{V^2}{2} = \rho \int_v \frac{V^2}{2} dv \quad (\text{IV.32})$$

Seja um volume elementar do fluido de altura unitária e área elementar ( $dA$ ), limitado por um arco ( $ds$ ) e uma fração de raio ( $dr$ ). Então:

$$dv = dA \cdot l = ds \cdot dr \cdot \theta \quad \therefore \quad v = \int_0^{2\pi} \int_{r=R}^{\infty} r d\theta dr$$

logo:

$$E_c^f = \int_0^{2\pi} \int_{r=R}^{\infty} \rho \frac{1}{2} \frac{R^4 U^2}{r^4} r dr d\theta = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 U^2 \quad (\text{IV.33})$$

onde a massa adicional  $M'$  será:

$$\boxed{M' = \rho \pi R^2} \quad (\text{IV.34})$$

que é a massa do cilindro de Raio  $R$ , que possui a mesma densidade do fluido. A força total para mover o corpo será:

$$\underline{F} = (M + M') \frac{dU}{dt},$$

como

$$F' = \rho \pi R^2 \frac{dU(t)}{dt} \quad (\text{IV.37a})$$

que conduz novamente a

$$M' = \rho \pi R^2$$

#### IV.2-2 - Cilindro Fixo num Fluxo Acelerado

Seja a Figura IV-1. Um diferente, mas análogo resultado será obtido para este caso, como se verá.

Com o corpo estacionário, é óbvio que a mudança de massa do corpo, assume outra dimensão e a forma permanece constante. Pode não haver efeito da força externa sobre o corpo pelo fluido. Todavia, como anteriormente foi visto, a variação  $E_c$  do fluido, é uma consequência da ação de todas as forças externas agindo no fluido. Nestes casos estas forças incluem as forças atuando no contorno externo do sistema fluido-corpo, bem como a reação do corpo sobre o fluido.

A força externa total exercida pelo fluido sobre o corpo parado será:

$$F = \iint_S p \cos \theta \, ds \quad (\text{IV.38})$$

Levando-se a Equação IV.17 nesta última, se obtém:

$$F = - \iint \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \cos \theta \, ds \quad (\text{IV.39})$$

Como potencial de velocidade para o caso será,

$$\phi = - U(t) \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad (\text{IV.40})$$

Se tem:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{r=R} = - 2 R \frac{d \underline{U}}{d t} \cos \theta \quad (\text{IV.41})$$

Levando-se a Equação (IV.41) para (IV.39), vem:

$$\underline{F} = + \int \int \rho 2 R \frac{d \underline{U}}{d t} \cos^2 \theta \, ds$$

que integrando-se resulta:

$$\underline{F} = 2 \pi R^2 \rho \frac{d \underline{U}(t)}{d t} \quad (\text{IV.42})$$

como  $M' = \rho \pi R^2$  vem

$$\underline{F} = 2 M' \frac{d \underline{U}(t)}{d t} \quad (\text{IV.43})$$

A componente da força devido ao movimento do fluido, é neste caso o dobro do valor da componente da força para o cilindro móvel (força devido a perturbação do fluido).

Comparando-se a Eq. (IV.41) com o primeiro termo da Equação (IV.37) (do 2º membro) observa-se que aquele é o dobro deste.

É interessante se notar que no 1º caso, com o cilindro móvel e a água parada, a mesma força seria encontrada se fizéssemos na Equação (IV.23):

$$M = M'$$

$$\underline{F} = 2 M' \frac{d \underline{U}(t)}{dt} \quad (\text{IV.44})$$

Pelo visto podemos concluir, que  $M' = \rho \pi R^2$  é a massa de fluido igual aquela deslocada pelo corpo

$M' = \rho \text{ volume}$  função da forma e dimensões do corpo, e  $\rho$  do fluido.

$$\text{Genericamente: } M^* = K M' \quad (\text{IV.45})$$

Para o caso:

Cilindro móvel  $k = 1$

Cilindro fixo  $k = 2$

fazendo  $k = C_m$

vem:

$$M^* = K M' = C_m M' = \rho C_m \text{ Vol}$$

então:

$$F = \rho C_m \text{ Vol. } \frac{d \underline{U}(t)}{dt} \quad (\text{IV.46})$$

Resultado semelhante a este, foi primeiramente apresentado por Lamb [94]

$C_m$  = coeficiente de inércia

Vol. = volume de fluido deslocado pelo corpo

$\frac{d \underline{U}(t)}{dt}$  = aceleração num fluido não perturbado, no centro do corpo, como se este não estivesse ali.

Como pode-se observar, o cálculo do arraste é dado pela integração dos componentes das forças na direção  $x$ , decorrente da ação da pressão sobre o contorno. Usando a teoria potencial (fluidos ideais) ao efetuar-se esta integração, obtém-se uma  $F_x$  de magnitude zero; o que não é coerente com a realidade, pois sabemos que a passagem de um fluido real por um corpo imprime sobre este uma força. Esta discrepância é conhecida como paradoxo de D'Alembert, que corresponde a hipótese de fluido ideal, em que despreza-se os efeitos de viscosidade. Muito embora, se se plotasse  $(p)$  versus  $(\theta)$  para um fluxo uniforme em torno de um cilindro, como sugere a Figura IV-1, encontrar-se-ia valores muito próximos da realidade, para a zona anterior do corpo. (Até uns  $30^\circ$  a partir do ponto de estagnação).

Para um fluxo permanente, pode-se representar a distribuição de pressões adimensionais, em torno do cilindro, para o escoamento potencial, e turbulento. Seja para a intensidade da pressão numa zona de movimento uniforme, onde a velocidade é  $U_o$ , e  $p$  a intensidade da pressão num ponto de velocidade  $U$

logo:

$$p - p_o = \frac{\rho}{2} (u_o^2 - u^2) = \Delta p \quad (IV.47)$$

ou ainda,

$$\frac{\Delta p}{\rho U_o^2 / 2} = 1 - \left(\frac{U}{U_o}\right)^2$$

para o ponto de estagnação

$$\frac{\Delta p}{\rho U_o^2 / 2} = 1 \quad (IV.48)$$

$$\text{pois: } U = 0 \quad \text{e} \quad p_s = p_o + \frac{\rho U_o^2}{2}$$



O efeito da separação da camada limite, desenvolve uma região de baixa pressão no lado posterior do cilindro, introduzindo um arraste, que aumenta a superfície da resistência (camada de atrito). A Figura IV-2 mostra a distribuição de pressões em torno de um corpo cilíndrico.

A diferença de pressão na frente e atrás, (o que não ocorre para fluidos ideais) é que origina a força de arraste.

O estudo feito nesta seção para o fluxo ou o corpo acelerado, conduziu a uma força resultante associada unicamente a um termo de inércia. Todavia, a consideração do fluido ideal e o escoamento potencial não responde sobre a existência de outros efeitos.

Tentando reproduzir em parte o verdadeiro fenômeno que ocorre nos fluidos reais, pensou-se em acrescentar-se a Eq. (IV.46), um termo que se responsabilizasse pelos efeitos devido a viscosidade do fluido.

E a força total seria constituída por duas parcelas, a saber:

$$F_T = (M + M') \frac{dU}{dt} + \text{Força de origem viscosa} \quad (\text{IV.49})$$

Experiências mostraram que esta força de origem viscosa, que causa o arraste tem duas parcelas a ser considerada: uma produzindo sobre o corpo efeitos de atrito; a outra de pressão, causando a separação e a criação de baixa pressão atrás do corpo. A primeira depende da forma do objeto e do fenômeno de separação, a segunda da extensão e do caráter da camada limite.

Estudando-se o fenômeno, poder-se-ia verificar, que o arraste a princípio<sup>(2)</sup> (a grosso modo) seria uma função de:

---

(<sup>2</sup>) Existem constatações, que conduzem a dependência da força de arraste, de outras grandezas.

$$F_A = f(A, \rho, \mu, U, E) \quad (\text{IV.50})$$

onde são grandezas que intervêm no problema:

$A$  = área do corpo;

$\rho$  e  $\mu$  = densidade e viscosidade do fluido;

$U$  = velocidade do corpo;

$E$  = módulo de elasticidade.

A análise dimensional permite o reagrupamento da expressão (IV.50), conduzindo a relação:

$$F_A = f^* (\sqrt{A} \rho U / \mu, U^2 \rho / E) A \rho U^2 \quad (\text{IV.51})$$

ou mais sinteticamente

$$F_A = \frac{\bar{f}(R_e, IM)}{2} A \rho U^2$$

se o coeficiente de arraste for definido por

$$C_D = \frac{F_A}{\frac{1}{2} A \rho U^2} \quad (\text{IV.52})$$

este será também uma função de  $R_e$  e  $IM_a$ . Isto é:

$$C_D = \bar{f}(R_e, IM_a) \quad (\text{IV.53})$$

A experiência tem demonstrado que os efeitos do  $R_e$  são predominantes para fluido incompressível, isto é, num grande intervalo onde  $IM_a$  é pequeno, e as velocidades subsônicas, onde  $C_D$  só seria função de  $R_e$ .

Note-se que:

$$C^2 = \frac{E}{\rho_0} \quad \text{e} \quad R_e = \frac{\rho U D}{\mu} \quad (IV.54)$$

logo, quando  $u \rightarrow C$  ;  $IM_a \rightarrow 1$

e torna-se importante o número de Mach bem como a compressibilidade.

Comparando-se a Eq. (IV.51) com a Eq. (IV.54) , vê-se a estampa da relação de  $F_A$  com  $IR_e$  e  $IM$  . Donde se chega a empírica equação:

$$\bar{F}_T = \bar{F} + \bar{F}_a \quad (IV.55)$$

$$\bar{F}_T = KM' \frac{dU(t)}{dt} + \rho CD \frac{AU^2}{2} \quad (IV.56)$$

Pela Eq. (IV.46) ter-se-á:

$$\bar{F}_T = \rho CM \text{ Vol } \frac{dU(t)}{dt} + \rho C_D A \frac{U^2(t)}{2} \quad (IV.57)$$

A equação (IV.57) obtida por este procedimento, eminentemente físico-intuitivo, e que mostra a expressão da força total do movimento do fluido (ação da onda), através da composição de duas parcelas: uma de inércia, proporcional a aceleração do fluido; e outra de arraste, proporcional ao quadrado da velocidade; é universalmente conhecido como Fórmula de Morison <sup>[116]</sup>. Expressões semelhantes, através de procedimentos análogos são conhecidos <sup>[81]</sup>.

### IV.3 - FÓRMULA DE MORISON POR UMA CONSIDERAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Seja uma estrutura cilíndrica fixa no leito do oceano, em águas profundas, submetida a ação das ondas. Supõem-se conhecido o campo cinemático (Ver Capítulo II), para qualquer tempo (t).

Então  $u = u(y, t)$ . É também razoável de se supor que  $F_T = F_T(y, t)$ .

A força total existe ( $F_T$ ), porque o corpo obstrui a passagem da onda dispersando as partículas d'água, e consequentemente, alterando a quantidade de movimento do sistema. Se a estrutura for completamente rígida, existirá uma reação horizontal ( $R_o$ ) e um momento ( $M_o$ ) na extremidade inferior (fundo); pois a distribuição da força total é levada até o fundo através do esforço cortante.

Seja um disco de espessura unitária, localizado a uma profundidade  $y$ . A força horizontal para mantê-lo estacionário, será dado pela Eq. (II.1 - 21-c) ou seja:

$$- F_T^x = \int_A \rho V_x (\underline{V} \cdot \underline{n}) dA + \int_y \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_x) dy \quad (IV.58)$$

para uma melhor visualização dos termos desta equação, façamos este disco de espessura unitária encerrado dentro de um volume de controle quadrangular ABCD, ou melhor, imagine-se a Figura IV-1 inscrita num quadrado de lado (D) e de vértices ABCD, com a face  $\overline{AB}$  normal a direção do fluxo.

Através da face  $\overline{AB}$  tem-se:

$$\int_{AB} \rho V_x (\underline{V} \cdot \underline{n}) dA \approx \rho u (u \cos 180) A = - \rho u^2 D \quad (IV.59)$$

Pelas faces BC, CD, DA considera-se  $V_x \approx 0$

(não entra fluxo nenhum); e seja também  $V_x \approx u$  (a velocidade dentro do volume de controle), para o outro termo da equação do momentum se tem:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_x) dy \approx \rho \frac{dU}{dt} y = \rho \frac{dU}{dt} \cdot D.D.I = \rho \frac{dU}{dt} D^2 \quad (IV.60)$$

Logo, a força unitária agindo em cada disco unitário do cilindro será aproximado por:

$$F_T \approx - \rho D^2 \frac{dU}{dt} + \rho D U^2 \quad (IV.61)$$

$\underline{u}$  e  $F_T^x$  estão na direção de  $(+x)$ , se  $\underline{u}$  tem direção oposta,  $F_T^x$  muda de sinal.

Nesta consideração de mudança de direção de  $F_T^x$  com a mudança da direção de  $\underline{U}$ , a quantidade  $u|u|$  é usada em lugar de  $u^2$ , para conservar o sinal da força de arraste.

Para que a Eq. (IV.61) se transforme numa igualdade, introduze-se as constantes empíricas  $C_M$  e  $C_D$ , que resulta:

$$F_T^x = C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{dU}{dt} + C_D \rho \frac{D}{2} u|u| \quad (IV.62)$$

$F_T^x$ , é a força total por unidade de comprimento, atuante numa fatia unitária do cilindro, e é a mesma equação já obtida (IV.57).

A Eq. (IV.62) representa a equação de Morison obtida da condição de conservação da quantidade de movimento, para um volume de controle.

$C_M$  e  $C_D$  são coeficientes empíricos, determinados experimentalmente e que dependem de uma série de grandezas:

Geometria, Rugosidade, Turbulência do Fluxo,  $R_e$ ,  $N_{kc}$ ,  $IM_a$ , e etc...

#### IV.4 - CÁLCULO DAS FORÇAS E MOMENTOS

Considera-se nesta seção, que  $C_M$  e  $C_D$ , na equação de Morison são constantes e conhecidos.

Conforme foi apresentado no Capítulo II, Parte 2, o campo cinemático associado a onda de projeto é descrito pela teoria linear de Airy; cujos resultados na direção de interesse (direção de propagação da onda (x)), são a seguir sumarizados:

$$\text{Perfil da onda: } \eta = -A \sin(kx - t) \quad (IV.63)$$

$$\text{Velocidade: } \underline{u} = -\frac{Agk}{\omega} \frac{\cosh(y+h)}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (IV.64)$$

$$\text{Aceleração: } \frac{du}{dt} \approx \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u} = Agk \frac{\cosh(y+h)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (IV.65)$$

##### IV.4-1 - Forças por Unidade de Comprimento de Estrutura

Considerando-se um comprimento unitário de estrutura, da Eq. (IV.57), se tem:

$$f = f_I + f_A = \rho C_M \frac{\pi D^2}{4} \dot{u} + \rho C_D D \underline{u} |u| \quad (IV.66)$$

Levando-se as Eqs. (IV.64) e (IV.65) em (IV.66) chega-se:

$$f_I = C_M (\rho \pi a^2) \frac{gH}{2} \cdot K \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh(kh)} \cos \theta_f \quad (IV.67)$$

$$f_A = -C_D (\rho a) g H^2 \left( \frac{g T^2}{4 L^2} \right) \left| \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \right|^2 \sin \theta_f |\sin \theta_f| \quad (\text{IV.68})$$

onde

$$\theta_f = (kx - \omega t) \rightarrow \text{ângulo de fase}$$

As equações (IV.67) e (IV.68) mostram as duas componentes da força total variando com a profundidade ( $y$ ), "offset" ( $kx$ ), e o tempo ( $\omega t$ ), estando o termo de inércia em fase com a aceleração, e o de arraste, com a velocidade.

Seus máximos valores se dão para  $y=0$ , diminuindo com a profundidade, todavia, o decaimento do arraste é mais rápido.

#### IV.4-2 - Forças Totais Sobre a Estrutura

No projeto de estruturas no mar, é importante o conhecimento da força total que atua sobre a mesma, e o momento de tombamento na base. Isto pode ser conseguido pela integração das equações (IV.67) e (IV.68):

$$F_T = \int_{-h}^0 f_I dy + \int_{-h}^0 f_A dy = F_I + F_A \quad (\text{IV.69})$$

e

$$M = \int_{-h}^0 (y+h) f_I dy + \int_{-h}^0 (y+h) f_A dy = M_I + M_A \quad (\text{IV.70})$$

Avaliando-se estas integrais se chega:

$$F_I = C_M (\rho \pi a^2) g H \left\{ \frac{1}{2} \tanh kh \cdot \cos (kx - \omega t) \right\} \quad (\text{IV.71})$$

$$F_A = C_D (\rho a) g H^2 \left\{ \frac{1}{8} \cdot \left[ 1 + \frac{2 kh}{\sinh (2 kh)} \right] \sin \theta_f |\sin \theta_f| \right\} \quad (\text{IV.72})$$

$$M_I = C_M (\rho \pi a^2) g \frac{H}{2} h \tanh(kh) \left\{ \left[ 1 + \frac{1 - \cosh(kh)}{(kh) \sinh(2kh)} \right] \right\} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (IV.73)$$

$$M_A = C_D (\rho a) g \frac{H^2}{8} \cdot h \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh(2kh)}{2kh \sinh(2kh)} \right) \right] \right\} \quad (IV.74)$$

onde:

$$n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] = \frac{C_g}{c} = \frac{\text{velocidade de grupo}}{\text{celeridade da onda}} \quad (IV.75)$$

Os termos entre chaves nas equações (IV.71) a (IV.75) representam quantidades adimensionais, e podem ser plotados em função da profundidade relativa ( $kh$ ), transformando-se em ábacos que simplificam tremendamente o cálculo das forças, semelhantes aos apresentados na referência <sup>[139]</sup> (Capítulo VII).

#### IV.5 - EXPRESSÃO ASSINTÓTICA DA FÓRMULA DE MORISON

A fórmula de Morison, é muitas vezes questionada. Mas se os efeitos de viscosidade puderem ser desprezados <sup>(3)</sup>, é possível mostrar analiticamente, que esta fórmula é uma correta solução assintótica para grandes valores de ( $ka$ ) <sup>[139]</sup>. O valor de  $C_M$  pode então ser 2. Isto será conseguido pela integração das forças devido as pressões não perturbadas.

Seja a Figura IV-1, num sistema de coordenadas polares, na qual se tem:  $z = r \sin$  e  $x = r \cos$

---

<sup>(3)</sup> O estudo a respeito será desenvolvido no Capítulo VI.



e

$$\underline{n} = r \cos \theta \underline{i} - r \sin \theta \underline{k}$$

A pressão de Froude-Krilov (campo de pressão não perturbado pela presença do corpo), será:

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho g A \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (\text{IV.76})$$

A força de Froude-Krilov para um elemento  $dy$  será:

$$d f_k = -\underline{i} \rho g A \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh(kh)} dy \cdot a \int_0^{2\pi} \sin(\omega t - ka \cos \theta) \cos \theta d\theta \quad (\text{IV.77})$$

como:

$$\sin(\omega t - ka \cos \theta) = \sin \omega t \cdot \cos(ka \cdot \cos \theta) - \cos \omega t \sin(ka \cdot \cos \theta)$$

e, considerando-se  $L \gg a \implies ka \ll 1$ , então:

$$d f_k = -\underline{i} \rho g A \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh(kh)} dy \cdot a \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \sin \omega t - \int_0^{2\pi} ka \cos^2 \theta d\theta \cos \omega t \right\} \quad (\text{IV.78})$$

Na Eq. (IV.78) observa-se que a parcela da força, que está em fase com  $\sin \omega t$  não contribui à força total, logo:

$$d f_k = \rho g A k \pi a^2 dy \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh(kh)} \cos \omega t \cdot \underline{i} = \rho \pi a^2 dy \dot{u} \underline{i} \Big|_{x=0} \quad (\text{IV.79})$$

onde

$\rho \pi a^2 dy$  = massa de fluido deslocada pelo corpo;

$\dot{u} \Big|_{x=0}$  = componente da aceleração para  $x = 0$ ,

como se o corpo não existisse.

A Eq. (IV.79) é a força de Froude-Krilov por unidade de comprimento da estrutura.

Sendo que a força total será:

$$\underline{F}_k = \int_{-h}^0 d_{fk} = (\rho \pi a^2) A g \tan(kh) \cos(kx - \omega t) \quad (IV.80)$$

A força devido a pressão não perturbada, é somente uma parte da força total sobre a faixa  $dy$ . Todavia, para este caso, é fácil perceber que se o corpo é virtual, o fluido atravessa a parede do mesmo. Sabe-se que fisicamente isto não é possível, por isso, simula-se a existência de uma parede no corpo, através da criação de um campo de pressão, que cause um campo de velocidade contrária à componente normal da velocidade do campo de velocidades incidentes (não perturbado).

Para se encontrar as forças devidas a esta distribuição adicional de pressão, raciocina-se da seguinte forma: como o comprimento da onda é grande, pode-se dizer que o problema de se encontrar esta distribuição de pressões adicionais, é equivalente ao problema onde se tem o cilindro acelerado no fluido com uma aceleração  $-\dot{u} \Big|_{x=0}$  (Ver Seção IV.2-1).

É sabido da hidrodinâmica básica [1], que a força sobre um corpo devido a uma oscilação forçada  $-\dot{u} \Big|_{x=0}$  será:

$$+ M^* \dot{u} \Big|_{x=0} \quad (IV.81)$$

onde  $M^*$  é a massa acrescida também chamada de massa adicional, que é a massa do volume do fluido deslocado, já anteriormente obtida (Eq. (IV.23a)).

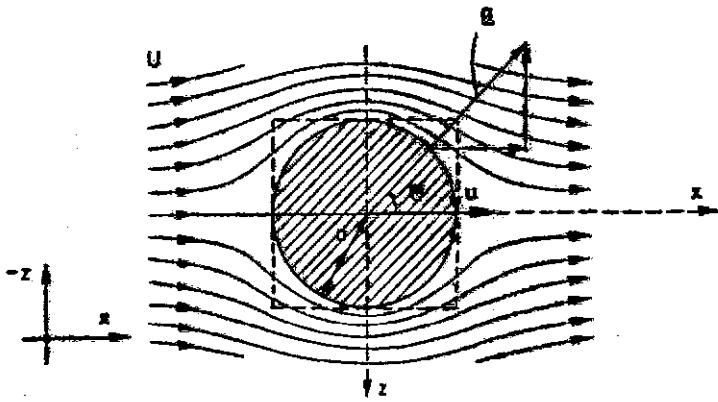


FIG. IV.1 - Cilindro fixo num escoamento irrotacional.

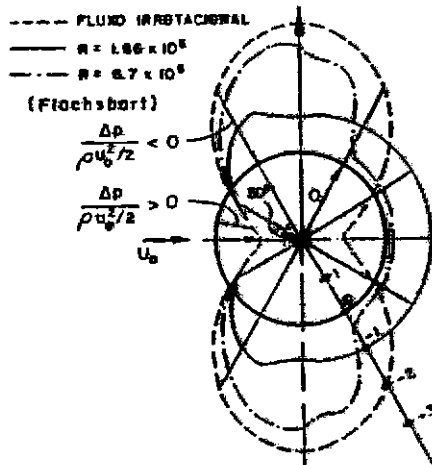


FIG. IV.2 - Distribuição de pressão em torno de um corpo cilíndrico (fluxo bi-dimensional).

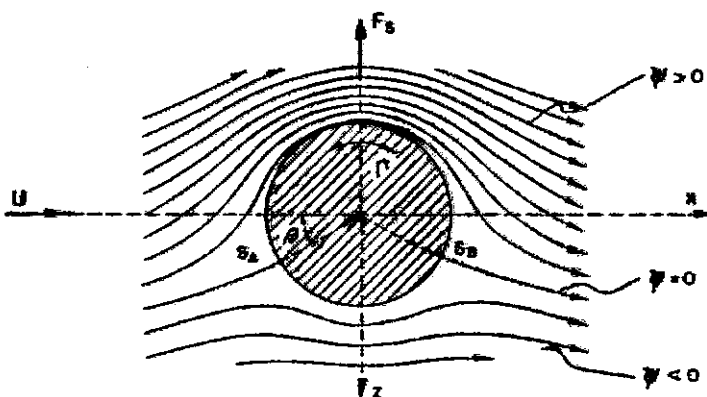


FIG. IV.3 - Força de sustentação

#### IV.6 - FORÇAS TRANSVERSAIS DEVIDO AO DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES

É bastante conhecido o fenômeno resultante, quando se incide um fluxo uniforme sobre um cilindro rotativo, imerso num meio fluido. Surge uma força transversal, que é conhecida como efeito Magnus<sup>(4)</sup>, Figura IV-3.

Uma outra experiência muito simples, que proporciona a visualização da existência de uma força transversal; é o efeito que ocorre, quando se tenta arrastar uma haste cilíndrica dentro d'água, nota-se a dificuldade para se deslocar a haste em linha reta, pois esta tende a descrever movimentos oscilatórios em torno da linha diretriz.

##### IV.6-1 - Fundamento Teórico da Força de Sustentação

Utilizando-se as bases desenvolvidas em cima da teoria potencial (Capítulo II, 1.<sup>a</sup> Parte), é possível montar o problema através de uma composição de escoamentos básicos (escoamento R. u. + Dipolo + vórtice livre), Figura IV-4.

A Função de corrente e o potencial de velocidades já foram anteriormente obtidos. Então:

$$\psi = ur \sin \theta - m \frac{\sin \theta}{2\pi r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

e

(IV.82)

$$\phi = ur \cos \theta + m \frac{\cos \theta}{2\pi r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Seja a Figura IV-5, onde pretende-se calcular as forças ( $F_x$  e  $F_y$ ) exercidas pelo fluido sobre o círculo.

---

(4) Denominação em homenagem ao descritor do efeito.

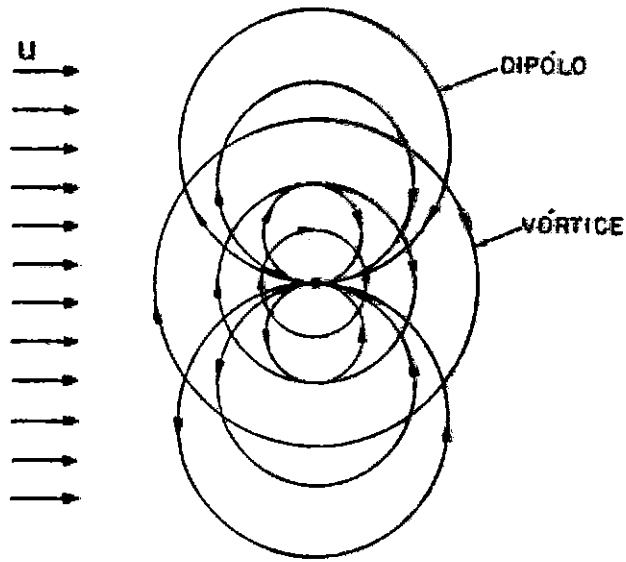


FIG. IV.4 - Dipólo num escoamento retilíneo com circulação.

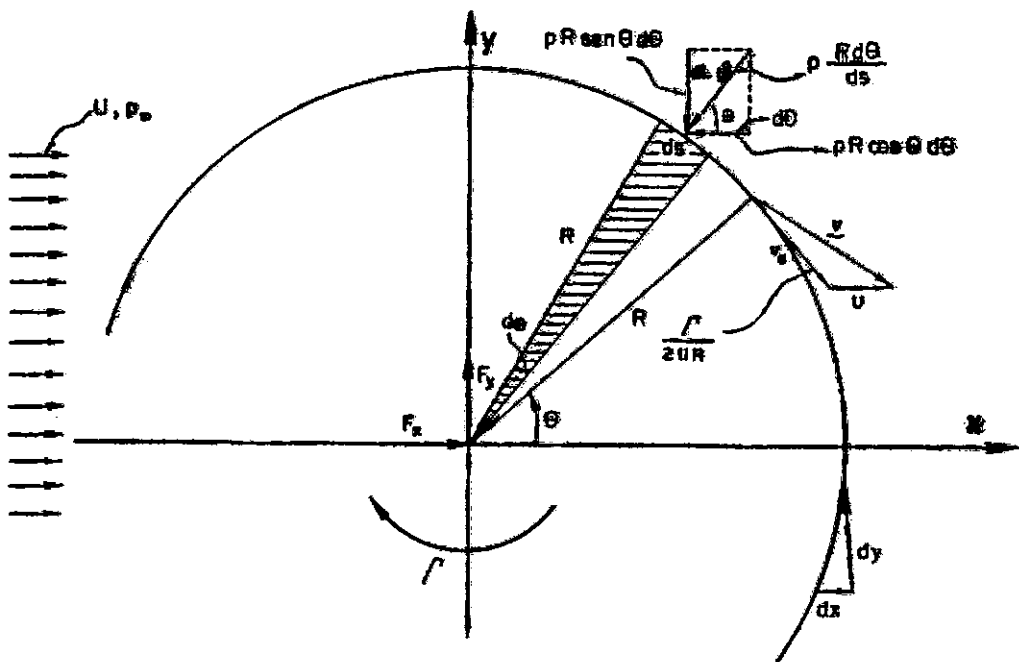


FIG. IV.5 - Forças devido a um fluxo uniforme passando por um cilindro.

Aplicando Bernoulli num ponto de corrente livre ( $V = U$  e  $p_{\infty}$ ) e outro ponto sobre a superfície do corpo onde a pressão é  $p$  e a velocidade  $\underline{V} = V_{\theta} + U$ . Para  $r = R$ , tem-se:

$$v_{\theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (\text{IV.83})$$

e

$$\rho \frac{V_{\infty}^2}{2} + p_{\infty} + \rho g Z_{\infty} = \text{constante} = \rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g Z \quad (\text{IV.84})$$

que resulta em:

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho \left[ -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \right]^2 \quad (\text{IV.85})$$

Sabe-se que:

$$D = F_x = - \int_0^{2\pi} p R \cos \theta \, d\theta \quad (\text{IV.86})$$

Levando-se a Eq. (IV.85) para a Eq. (IV.86), e avaliando-se as integrais, obtem-se o valor zero para cada parcela, logo

$$F_x = D = 0 \rightarrow \text{Paradoxo de D'Alembert} \quad (\text{IV.86a})$$

Para fluidos ideais (invíscitos) a força de arraste exercido sobre um contorno sólido é nula.

Fazendo  $\frac{\Gamma}{2\pi r} = \lambda$ , levando para a Eq. (IV.85) e depois substituindo-se  $(p)$  na Eq. (IV.87), tem-se:

$$L = -R \int_0^{2\pi} \left[ p_{\infty} + \frac{\rho}{2} \left( U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) - 4 \frac{U\lambda}{R} \sin \theta - \frac{\lambda^2}{R^2} \right) \right] x \sin \theta \, d\theta \quad (\text{IV.87})$$

como a 1.<sup>a</sup> e a 2.<sup>a</sup> integral são nulas, e

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \pi$$

vem:

$$F_y = L = \frac{R^2 \rho U \lambda \pi}{R} = \rho U \Gamma \quad (\text{IV.88})$$

força de sustentação (Lift) por unidade de comprimento do cilindro, para um escoamento potencial.

#### IV.6-2 - Cálculo da Força de Sustentação ( $F_s$ )

Para um fluido real, a resistência da superfície e os efeitos de separação produzem uma força de arraste ( $F_A$ ). O resultado do movimento de uma circulação local, super-imposto sobre o fluxo permanente passando pelo cilindro desenvolve regiões de altas e baixas velocidades nos lados opostos do cilindro, ocasionando com isso uma força transversal [170].

O coeficiente  $C_L$  é definido pela equação:

$$F_s = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 A \quad (\text{IV.89})$$

$F_s$  = força de sustentação

$A$  = área de projeção do corpo sobre o plano normal a direção do fluxo.

Para um cilindro tem-se:

$$F_s = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 D \quad \therefore \quad C_L = \frac{F_s}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (\text{IV.90})$$

Como foi mostrado no Capítulo III, estas forças transversais dependem da resposta dinâmica da estrutura. Se a frequência natural da estrutura estiver em torno de duas vezes a frequência da onda ( $N/\omega \approx 2$ ), um acoplamento entre o movimento da estrutura e o do fluido pode ocorrer, resultando grandes forças transversais. Chakrabarti [ ] observou que a frequência destas forças são sempre múltiplas da frequência da onda.

A máxima força de sustentação é proporcional ao quadrado da velocidade horizontal induzida pela onda, e análoga a força de arraste:

$$F_s = C_L (\rho a) g H^2 \left[ \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{2 k h}{\sinh (2 k h)} \right) \right] \sin \theta_f |\sin \theta_f| \quad (IV.91)$$

onde  $C_L$  é um coeficiente empírico, semelhante ao coeficiente de arraste  $C_D$ .

#### IV.7 - FORÇAS DE ONDA SOBRE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS

Seja uma estrutura relativamente flexível oscilando em virtude da excitação da onda (Figura IV.6). Ainda que ocorram forças transversais, supõe-se que estas não influem (para simplificar a análise), e que a estrutura vibra somente na direção de propagação da onda. Também se considera que a forma do modo de vibração, corresponde ao movimento das partículas dadas pela teoria de Airy; todavia, com pequenas amplitudes, e seu movimento é harmônico com mesma frequência da onda incidente<sup>(5)</sup>.

A força total por unidade de comprimento da estrutura, é constituída pela soma das componentes de inércia, e arraste:

---

(5) Consideração não muito razoável.



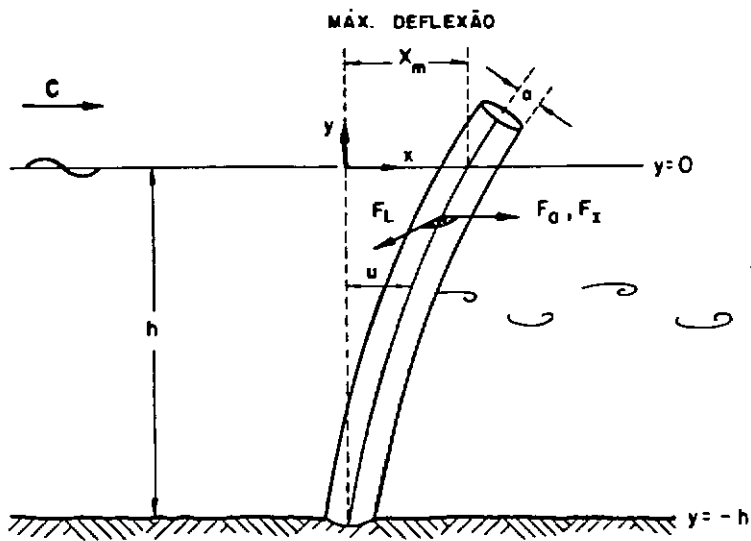


FIG. IV.6 - Estrutura flexível vibrando sob ação da onda.

$$F_T = F_I + F_A = (\rho \pi a^2) \dot{u} + C_M (\rho \pi a^2) (\dot{u} - \dot{x}) + C_D \rho a |u - \dot{x}| (u - \dot{x}) \quad (\text{IV.92})$$

Supõe-se que o deslocamento do eixo da estrutura tenha a forma:

$$x = X_m f(y) \cos (\omega t + \psi) \quad (\text{IV.93})$$

onde:

$X_m$  = deslocamento máximo no topo,

$\psi$  = representa a diferença de fase entre o movimento da onda e da estrutura. O campo cinemático do eixo da estrutura será dado por:

$$\text{velocidade: } \dot{x} = -\omega X_m f(y) \sin \bar{\theta} \quad (\text{IV.94})$$

$$\text{Aceleração: } \ddot{x} = -\omega^2 X_m f(y) \cos \bar{\theta} \quad (\text{IV.95})$$

Fazendo  $C_M = C_D = 1$ , e substituindo-se as velocidades e acelerações na Eq. (IV.92), tem-se:

$$F(y, t) = \rho \pi a^2 f(y) \{ 2 g k a \cos \theta_f + \omega^2 X_m \cos \bar{\theta} \} + \rho a \left| f(y) \right|^2 \left\{ -\frac{g k A}{\omega} \sin \theta_f + \omega X_m \sin \bar{\theta} \left\{ -\frac{g k A}{\omega} \sin \theta_f + \omega X_m \sin \bar{\theta} \right\} \right\}, \quad (\text{IV.96})$$

onde

$$\theta = \omega t - \psi \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh}$$

para águas profundas:

$$f(y) \approx e^{k \cdot y} \quad \text{e} \quad \omega^2 \approx g k, \quad \text{então a Eq. (IV.96) fica:}$$

$$F(y,t) = \rho \pi a^2 \omega^2 e^{k \cdot y} \left\{ 2A \cos \theta'_f + X_m \cos \bar{\theta} \right\} + \rho a \omega e^{2k \cdot y} \left\{ -A \sin \theta_f + X_m \sin \bar{\theta} \right\} \times \left\{ -A \sin \theta_f + X_m \sin \bar{\theta} \right\} \quad (IV.97)$$

As forças totais são obtidas por:

$$F_T(t) = \int_{-h}^0 F(y,t) dy \quad \text{e} \quad M_T(t) = \int_h^0 (y+h) F(y,t) dy \quad (IV.98)$$

Se a estrutura for estacionária  $X_m = 0$ , a Equação (IV.96) se torna idêntica as Eqs. (IV.67, 68).

#### IV.8 - ESCOLHA DOS COEFICIENTES DE FORÇAS HIDRODINÂMICAS ( $C_D$ , $C_L$ )

Um dos maiores problemas existentes no complemento das forças provocadas pela ação das ondas, está na escolha adequada destes coeficientes empíricos; pois são muitos os fatores que intervêm na questão, tais como,  $R_e$ ,  $N_{kc}$ , irregularidades na superfície do corpo, variações ao longo da estrutura, e do tempo; geometria, e outros. Muitos estudos <sup>[141]</sup>, <sup>[18]</sup>, <sup>[108]</sup>, têm sido realizados para a determinação destes coeficientes, inclusive experimentos sofisticados <sup>[184]</sup>, <sup>[75]</sup>, e a reunião de muitos destes resultados, em função de uma série de variáveis <sup>[66]</sup>. Todavia, além das prescrições de certas normas, normalmente tem-se recomendado certos procedimentos que serão apresentados a seguir <sup>[169]</sup>.

##### IV.8-1 - Fatores que Influenciam em $C_D$

O coeficiente de arraste  $C_D$  depende diretamente de  $R_e$ . Isto se poderá verificar, no gráfico da Figura (IV-7), onde também são apresentados alguns resultados experimentais, bem como outras curvas próprias, para estimativas diferentes de

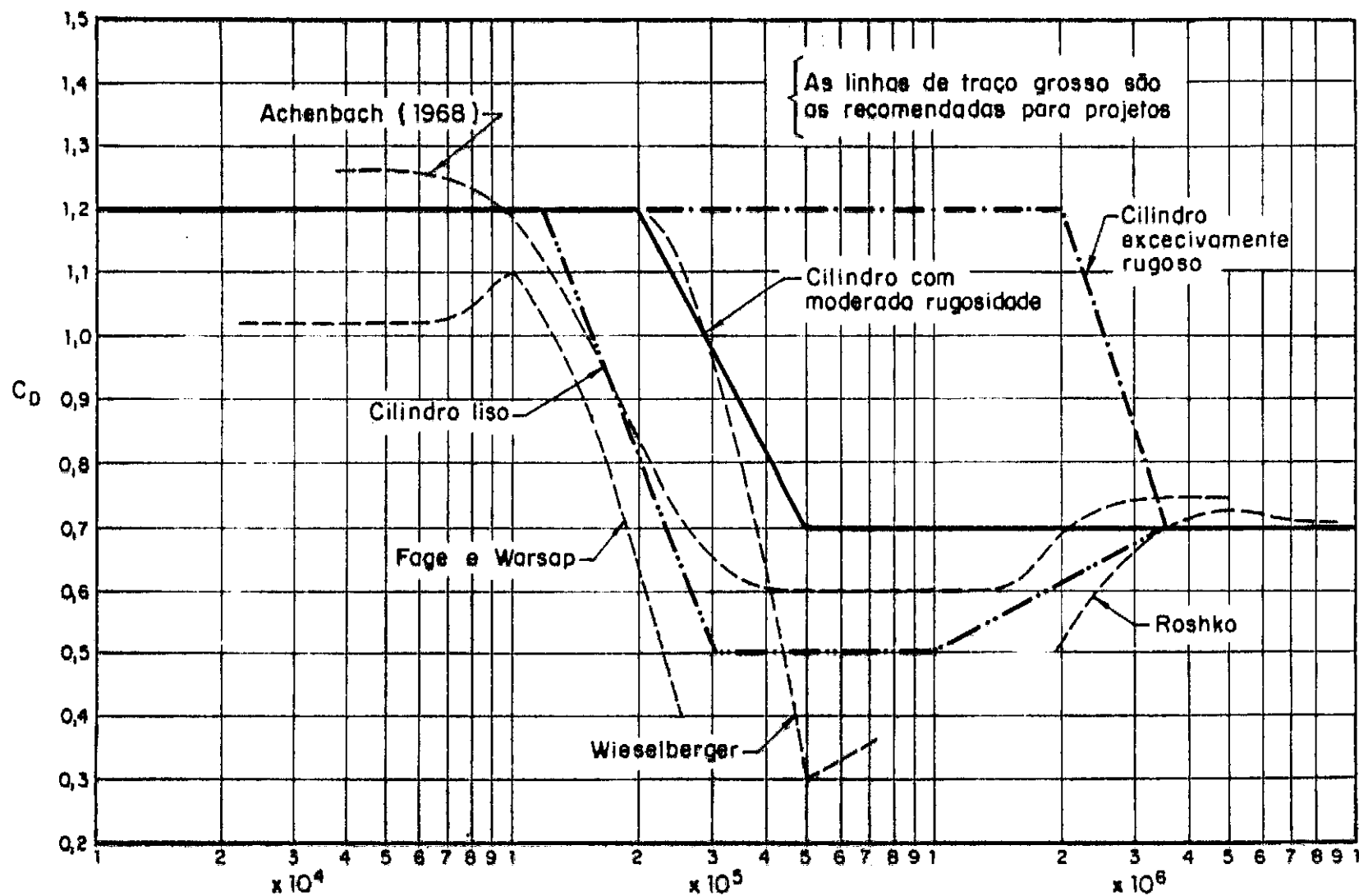


FIG. IV.7 - Variação do coeficiente de arraste, com o número de Reynolds ( $Re$ ).

( Ref. : 169 )

rugosidade da superfície.

Ali são identificadas 03(três) regiões:

- 1) Regime sub-crítico:  $R_e < 10^5$ ,  $C_D \approx$  constante, isto é,  $C_D \approx 1,2$
- 2) Regime de transição:  $10^5 < R_e < 4 \times 10^5$ ,  $C_D$  varia linearmente com  $R_e$
- 3) Regime super-crítico:  $R_e > 4 \times 10^5$ , onde  $C_D \approx$  constante, isto é,  $C_D \approx (0.6 - 0.7)$

#### IV.8-2 - Fatores que Influenciam em $C_M$

Os valores encontrados por Lamb<sup>[94]</sup>, Mac Camy e Fuchs<sup>[101]</sup> teoricamente ( $C_M \approx 2$ ) servem apenas como uma estimativa deste coeficiente; o efeito produzido pelo fluido real que envolve o corpo, invalida a análise que levou a considerar  $C_M = 2$ , pois os fatores que influenciam em  $C_D$ , são os mesmos para  $C_M$ ; todavia, uma dependência quantitativa tem sido estabelecida entre  $C_M$  e  $R_e$ .

Baseado nas informações obtidas através de resultados de muitos autores, tem-se recomendado para  $C_M$  os seguintes valores (Vide Tabela IV-1).

$C_M$	Reynolds ( $R_e$ )
2	$R_e > 5 \times 10^5$
$2,5 - \frac{R_e}{5 \times 10^5}$	$2,5 \times 10^5 < R_e < 5 \times 10^5$
1,5	$R_e < 5 \times 10^5$

Tabela IV-1

Até agora tem sido discutido a aplicação da fórmula de Morison particularizada, para o caso de estruturas cilíndricas verticais, com o eixo da estrutura perpendicular ao plano de incidência da onda. Todavia, quando a estrutura ou seus elementos se encontram numa posição arbitrária, em relação ao plano da onda, não é possível aplicar as equações apresentadas neste Capítulo. No entanto, existem várias técnicas na literatura <sup>[105]</sup>, <sup>[133]</sup> para se calcular as forças sobre cilindros inclinados, pela aplicação da fórmula de Morison, muito embora, não existam concordâncias entre elas. Inclusive as referências acima desenvolvem programações com este fim; para quaisquer condições de posicionamento da estrutura em relação a água, bem como para todas as possibilidades de incidência da onda.

#### IV.9 - APLICAÇÃO

Seja o cálculo das forças de onda sobre um pilar isolado, que serve de suporte a passarela de acesso à torre de sinalização de um pier. São as características da onda de projeto: altura -  $H = 1,5 \text{ m}$  e Período -  $T = 3 \text{ s}$ .

São dados:

$h = 8 \text{ m}$  comprimento da estrutura:  $\ell = 17 \text{ m}$

$\rho_a = 10,25 \text{ kg/m}^3$  diâmetro externo:  $D = 0,324 \text{ m}$

espessura da parede:  $e = 0,0095 \text{ m}$

$$I \approx \pi a_m^3 e = 0,116 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$A_s \approx 2\pi a_n e = 9 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 205 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Supondo o eixo do pilar, coincidente com a origem do sistema de referência:  $x = 0$

logo:

$$\eta = - \frac{H}{2} \sin \theta_f$$

e

$$F_T = F_I + F_A = \rho \pi a^2 C_M \int_{-h}^0 \dot{u} dy + \rho a C_D \int_{-h}^0 u |u| dy$$

1) Cálculo do comprimento de onda em águas profundas:

$$L_o = \frac{g}{2\pi} T^2 \quad \therefore \quad L_o = 14,05 \text{ m}$$

2) Verificação em que tipo de águas se localiza a estrutura:

$$kh = \frac{2\pi}{L_o} h = 3,6 > \pi \implies \text{águas profundas}$$

$$\text{logo: } L = L_o \quad \text{e} \quad \tanh(kh) \rightarrow 1$$

então, as equações modificadas podem ser aplicadas:

$$\text{e} \quad u = - \frac{H}{2} g \frac{T}{L} e^{ky} \sin \theta_f \quad \therefore \quad u = - \frac{H\pi}{T} e^{ky} \sin \theta_f$$

$$\dot{u} = \frac{Hg\pi}{L} e^{ky} \cos \theta_f \quad \therefore \quad \dot{u} = 2H \left( \frac{\pi^2}{T^2} \right) e^{ky} \cos \theta_f$$

3) Determinação de  $C_M$  e  $C_D$

$$R_{e \text{ max}} = \frac{U_{\text{max}} D}{\nu} = \frac{\pi H}{T} \frac{D}{\nu} = \frac{\pi \times 1,5}{3} \times \frac{0,324}{1,11 \times 10^{-6}} = 4,58 \times 10^5$$

Para seção transversal circular  $C_M = 2$

Pelo gráfico da Figura IV-7 tem-se:  $C_D = 1,3$

4) Cálculo das Forças:

$$F_I = (\rho \pi a^2) C_M \int_{-8}^0 \frac{Hg\pi}{L} e^{ky} dy \cos \theta_f =$$

$$F_I = (1025 \times \pi \times (0,162) \times 2 \times 3 \times (\frac{\pi^2}{9}) \left| \frac{e^{ky}}{k} \right|_{-8}^0 \cos \theta_f =$$

$$F_I = 1209 \cos \theta_f \quad (N) ,$$

e

$$F_A = (\rho a) C_D \left( -\frac{H\pi}{T} \right) \sin \theta_f \int_{-8}^0 (e^{ky})^2 dy \left| \sin \theta_f \right| \sin \theta_f =$$

$$= (\rho a) C_D \left( \frac{H\pi}{T} \right) \left| \frac{e^{2ky}}{2k} \right|_{-8}^0 \sin \theta_f \sin \theta_f = 1025 \times 0,162 \times 1,3$$

$$\times (2,467) (1,11806) \left| 1 - 0.00078 \right| \sin \theta_f \left| \sin \theta_f \right| \therefore$$

$$F_A = 595,5 \sin \theta_f \left| \sin \theta_f \right| = \pm 595,5 \sin^2 \theta_f \quad (N)$$

Pode-se observar que a parcela de inércia é mais que o dobro do de inércia.

Sejam as verificações<sup>(6)</sup>:

$$- K_a = \frac{2\pi}{L} a = 0.0724 \frac{\pi}{10} \rightarrow \text{equação de Morison}$$

$$\xi_{y=0}^{\max.} = \frac{H}{\tanh(kh)} = \frac{1,5}{1,00} \approx 1,5 \quad (\text{órbita máxima das partículas})$$

$$- \frac{\xi}{D} \approx \frac{H}{D} = 4,63 < 5 \rightarrow \text{inércia predomina, fato que já se tinha observado anteriormente.}$$

---

(6) No Capítulo VI será dedicado a obtenção destes limites.



$(kx - \omega t) = \theta_f$	$\pm \sin^2 \theta_f$	$F_A$ (N)	$\cos \theta_f$	$F_I$ (N)	$F_I$ (N)
0°	0,00	0,00	1,0	1209	1209
30	0,50	297,7	0,866	1047	1196
60	0,25	147,9	0,500	604,5	753,4
90	1,00	595,50	0,00	0,00	-595,50
120	0,75	446,6	-0,500	-604,5	-158
150	0,25	148,9	-0,866	-1047	-898,1
180	0,00	0,00	-1,000	-1209	-1209

TABELA IV-2

- Pesquisa do Pico da Força:

$$F = \pm A_A \sin^2 \theta_f + A_I \cos \theta_f$$

Para o pico máx. de  $F \rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$

$$\pm A_A 2 \sin \theta_f \cos \theta_f - A_I \cdot \sin \theta_f = 0 \quad \therefore \cos \theta_f = \frac{A_I}{2 A_A}$$

Se  $A_I \geq 2 A_A \rightarrow$  o pico ocorre quando  $\theta_f = 0^\circ$

Se  $A_I < 2 A_A \rightarrow$  o pico ocorre quando  $\theta_f = 90^\circ$  e  $180^\circ$

como  $\frac{A_I}{A_A} = \frac{1209}{595,5} = 2,03 > 2,0 \rightarrow$  máx. a  $0^\circ$

então

$$F_{\max} = 1209 \text{ N.}$$

## CAPÍTULO V

### AÇÃO DE ONDAS EM ESTRUTURAS DE GRANDES DIMENSÕES

#### V.1 - INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, e mais intensamente, por certo no futuro, tem sido, e será a atenção devotada a exploração dos mares, seus recursos e potencialidades.

O rápido crescimento da exploração e produção de petróleo longe da costa, tem suscitado a demanda de estruturas de grandes dimensões, que pudessem atender os requisitos de produção e estocagem. Muitos planos de construções no oceano são propostos, tais como: ilhas artificiais, usinas nucleares, aeroportos flutuantes, edificações submersas, e outras tantas obras do engenho humano. Todavia, a existência destas obras de grandes dimensões, conduzirão inevitavelmente a efeitos, em que a presença destas estruturas, alterarão o campo das ondas. Neste caso, não mais ocorrerá o que acontecia com as estruturas do Capítulo anterior ( $ka < 2\pi/10$ ); a presença da estrutura se faz sentir, originando significativos efeitos de interação, denominado de difração, ou espalhamento ( $ka > 2\pi/10$ ).

Como a estrutura não se mostra mais transparente a onda, o cálculo das forças não poderá ser mais feito pela expressão de Morison, carecendo-se para isto de um novo processo.

Neste Capítulo, procurou-se apresentar outra sistematização dos estudos clássicos realizados por <sup>[117]</sup> para o espalhamento de ondas sonoras; Havelock <sup>[64]</sup> e Mc Camy-Fuchs para a difração de ondas d'água, bem como outros autores mais recentes, tais como: Chakrabarti, Mei e Sarpkaya.

Devido as grandes dimensões de tais estruturas, a solução através do escoamento potencial linear, possui uma importância primária, pois neste caso, os efeitos viscosos podem ser negligenciados.

Como será visto, o efeito da difração, em grandes estruturas no mar, será baseado na teoria potencial, e a distribuição das pressões em redor a superfície imersa, calculada por esta teoria, conduz a resultados muito bons para as forças induzidas pelas ondas.

Apesar de não se ter tradição, nem uma boa experiência no projeto e construção destas estruturas (*off-shore* tipo gravidade) no Brasil, elas possuem uma série de vantagens sobre as que atualmente se utiliza em nossos campos petrolíferos, como se tem discutido algumas vezes [91], [183]; razão pela qual, se compreende, que em muito breve a adoção do seu uso, será uma meta a perseguir.

Como nestas estruturas normalmente o reservatório (caixão), e as torres, se encontram em zonas tipicamente de pouca influência dos efeitos de viscosidade<sup>(1)</sup>, assim como, são constituídas por elementos cilíndricos verticais serão constantes, com a seção variando suavemente, a teoria que será apresentada neste Capítulo, representa um recurso potente para abordagem de problemas tipicamente enquadráveis nas condições prescritas para a questão.

O Capítulo V, reúne praticamente o propósito fundamental deste trabalho, e tenta evidenciar a dependência significativa das pressões dinâmicas, forças, momentos e a distribuição de elevação da superfície livre do parâmetro de espalhamento ( $ka$ ).

## V.2 - Efeito de Espalhamento da Onda

Quando uma onda d'água encontra um obstáculo, alguma coisa da onda é desviada do seu curso original. Define-se a diferença entre a onda atual e a onda não perturbada, que es-

---

( ) As regiões de influência de cada efeito será discutido no Capítulo VI.

taria presente se o obstáculo não estivesse ali, como uma onda espalhada. Quando uma onda plana encontra um corpo em sua trajetória, em composição com a onda original ali se encontra uma onda espalhada (ou difratada) que se estende do obstáculo em todas as direções, distorcendo e interferindo na onda plana original. Se o obstáculo for muito grande comparado com o comprimento da onda, metade destas ondas espalhadas se estendem mais ou menos uniformemente em todas as direções, e a outra metade se concentra atrás do obstáculo, interferindo destrutivamente com as ondas planas não perturbadas existentes atrás deste; criando um delineamento de cantos afilados (Vide Figura V-11).

### V.3 - TEORIA DA DIFRAÇÃO LINEAR PARA ONDAS PLANAS

A análise adimensional das forças de onda sobre uma estrutura fixa, é uma forma conveniente de indicar as condições de difração, ou quando outros efeitos são importantes.

Para uma força invariante no tempo tem-se:

$$\frac{F}{\rho g H a^2} = f \left( k a, \frac{H}{L}, k h, R_e \right)$$

Se as dimensões das estruturas são grandes ( $k a > 2\pi/10^{(2)}$ ),  $R_e$  pode geralmente ser omitido [142]. Como  $H/L$  é pequeno (teoria linear - ondas de pequenas amplitudes) então o problema da difração linear se reduz a:

$$F / \rho g H a^2 = f (k a, k h)$$

Logo, os coeficientes de força variarão unicamente com  $(k a)$  para uma dada profundidade d'água.

---

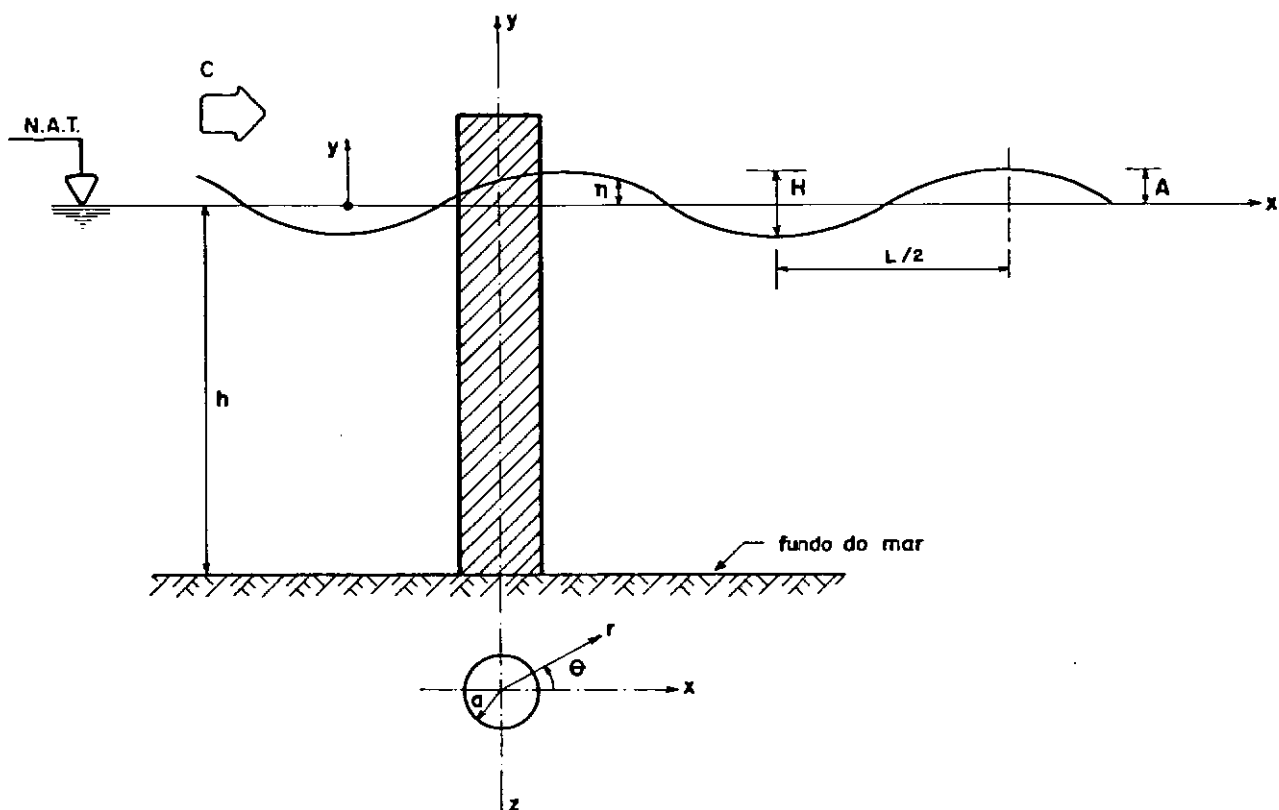
(2) Limite para caracterização dos efeitos de difração obtido no Capítulo VI.

### V.3-1 - Formulação do Problema

O problema consiste em determinar o potencial de velocidades ( $\phi$ ), que atenda a equação de Laplace, e esteja sujeita a certas condições de contorno. O estudo de determinação do problema de valor do contorno já foi realizado (Vide Capítulo II, Seção II.2-3).

Sejam as considerações:

- o fluido é o assumido como incompressível e invíscido
- fluxo irrotacional
- fundo horizontal
- movimento da onda é simples harmônico no tempo
- a relação entre a altura e o comprimento da onda é suficientemente pequeno para que todas as quantidades envolvendo o parâmetro ( $H/L$ ) de segunda ordem ou superior possam ser negligenciadas (teoria linear).



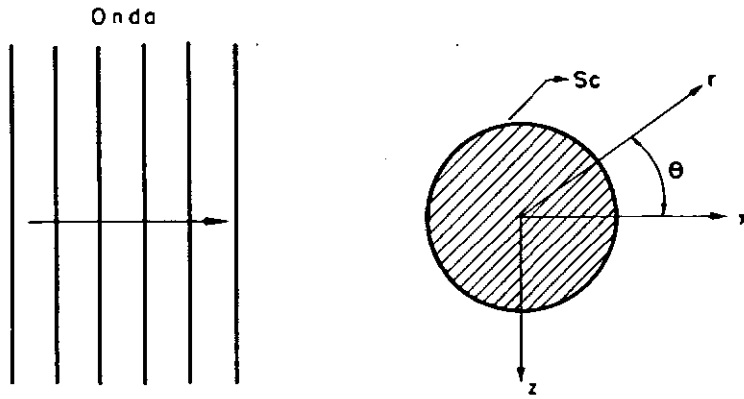


FIGURA V.2-ONDA INCIDINDO SOBRE A ESTRUTURA.

O movimento é governado pelas equações:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r, \theta, y, t) &= 0 \quad \text{no fluido} & a \leq r < \infty \\ & & -h \leq y < \eta \\ & & -\pi \leq \theta < \pi \end{aligned} \quad (V.1)$$

$$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=-h} = 0 \quad (V.2)$$

$$\begin{aligned} g\eta + \phi_t + \frac{1}{2} (\theta_r^2 + \theta_y^2 + \frac{1}{r^2} \phi_\theta^2) &= 0, & y &= \eta \\ & & r &\geq a \end{aligned} \quad (V.3)$$

$$\eta_t + \phi_r \eta_r + \frac{1}{r} \phi_\theta \eta_\theta = \phi_y, \quad y = \eta; \quad r \geq a \quad (V.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad -h \leq y \leq \eta \quad (V.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\phi_r^s + i k \phi^s) = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (V.6)$$

$$v_r = \phi_r \quad ; \quad v_y = \phi_y \quad ; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \phi_\theta \quad (V.7)$$

e

$$\phi = \text{potencial de velocidade total} = \phi^I + \phi^S \quad (V.8)$$

onde:

as letras subscritas  $r$ ,  $\theta$ ,  $y$  e  $t$  indicam derivadas parciais com resposta a estas variáveis.

A Equação (V.6) é a condição de radiação; que requer, que a onda "*difratada*" se aproxime de uma onda progressiva, numa distância infinita do cilindro; condição de Sommerfeld [154].

Sobre o corpo estacionário  $C$ , a velocidade normal total é desprezível

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \phi^S}{\partial n} = - \frac{\partial \phi^I}{\partial n} \quad \text{sobre } C \quad (V.9)$$

onde  $n$  é a normal unitária para dentro do corpo.

Aplicando a Teoria Linear de ondas de gravidade; a velocidade potencial de uma onda incidente não perturbada, pode ser escrita:

$$\phi^I = + \frac{gH}{2\omega} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} e^{i(kx - \omega t)} \quad (V.10)$$

onde

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (V.11)$$

se as coordenadas polares  $(r, \theta)$  forem introduzidas na Equação (V.10), podemos reescrevê-la como uma série infinita de po

tências, isto é, numa expansão em harmônicos cilíndricos.

Usando a expansão de Jacobi vem

$$e^{ikx} = e^{ik r \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta \quad (V.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1 & \text{para } n &= 0 \\ \epsilon_n &= 2 & \text{para } n &> 0 \end{aligned} \quad (V.13)$$

e

$J_n$  = função de Bessel do 1º tipo de ordem  $n$

então

$$\phi^I = + \frac{gH}{2} \frac{\cosh k(h+y)}{\cosh kh} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr) \cos n\theta \right] e^{-i\omega t} \quad (V.14)$$

### V.3-2 - Potencial de Difração ( $\phi^S$ )

Consideremos que a onda difratada admita uma expressão semelhante à Equação (V.14).

Uma onda progressiva é facilmente descrita em coordenadas polares. Por separação de variáveis encontra-se uma expressão geral para a onda difratada, que se comporta como uma onda progressiva radial [111]. Para uma onda se afastando do corpo e simetricamente distribuída, com respeito a  $\theta$ , é tal que  $\phi(-\theta) = \phi(\theta)$ .

então

$$\phi^S = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta e^{-i\omega t} \quad (V.15)$$



onde

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

e

$H_n^{(1)}$  = função de Hankel de 1º tipo e ordem  $n$ ,  
que é uma combinação de funções de Bessel

$$H_n^{(1)} = J_n + i Y_n$$

de fato a Eq. (V.15) se apresenta como uma onda progressiva, pois para  $kr \gg 1$ , isto é ( $r \rightarrow \infty$ )  $H_n^{(1)}$  se comporta como a fórmula assintótica.

$$H_n = H_n^{(1)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i \left( \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} e^{ikr}$$

$$\lim \sqrt{kr} \left( \frac{\partial \phi^s}{\partial r} - i k \phi^s \right) = 0$$

que também satisfaz

$$kr \gg 1$$

que pode ser considerada como uma forma alternativa da condição de radiação, Equação (V.6).

Para grandes valores de  $r$ , (Eq. (V.15) se comporta como uma periódica perturbação se movendo para o exterior, na direção de  $r$ , com frequência  $\omega$  e número de onda  $k$ , que é desprezível para  $r \rightarrow \infty$  [101].

Levando as Eqs. (V.9) e (V.15) para a Eq. (V.8) e aplicando a condição de contorno (Eq. V.5), isto é,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$

pode-se determinar as constantes  $B_n$ .

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial r} + \frac{\partial \phi^s}{\partial r} = 0, \quad r = 0$$

Seja

$$\phi_o(y) = + \frac{gH}{2\omega} \cdot \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \quad (V.16)$$

Resolvendo para  $B_n$  tem-se:

$$B_n = - \phi_o(y) \frac{\epsilon_n i^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \quad (V.17)$$

para

$$n = 0 \quad \therefore \quad \epsilon_o = 1$$

$$B_o = - \phi_o(y) \frac{J_o'(ka)}{H_o^{(1)'}(ka)} \quad (V.17a)$$

para qualquer  $n > 0 \rightarrow \epsilon_n = 2$

$$B_n = - \phi_o(y) \frac{2 i^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \quad (V.17b)$$

onde houver (') indica derivado com respeito ao argumento.

Levando-se a Eq. (V.17b) para (V.15); e esta última com a Eq. (V.14) para (V.8), e posteriormente reorganizando-se o somatório, chega-se:

$$\phi = \frac{+gH}{2} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left[ J_n(kr) - \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr) \right] \cos n\theta \right\} e^{-i\omega t}$$

onde

$$\epsilon_o = 1 \quad \text{e} \quad \epsilon_n = 2 \quad \text{para} \quad n > 0 \quad (V.18)$$

a segunda parcela do segundo membro da Eq. (V.18), que corresponde ao potencial total de difração é apresentada em termos da função de Hankel do 1º tipo. Entretanto, alguns autores [64], [101], [119] preferem apresentá-las em termos das funções de Hankel de 2º tipo, cuja diferença reside na escolha conveniente de uma ou de outra, na obtenção do potencial de difração; ou seja, ambas satisfazem a Equação de Bessel de ordem  $n$ , contudo, pelo fato do fator tempo ser da forma  $\exp(-i\omega t)$ , este melhor se combina com as funções de 1º tipo, ao mesmo tempo, que a representação exponencial do comportamento assintótico de  $H_n^{(1)}$ , para grandes argumentos de  $(kr)$  (Eq. 9) Apêndice II, além de atender a condição de radiação (Eq. V.6) representa uma onda progressiva no infinito, daí sua conveniência diante das funções de 2º tipo.

Por outro lado observa-se que a parcela da Equação (V.18) referente ao potencial da difração, corresponde a solução rigorosa do problema de difração para  $r > a$  [154].

### V.3-3 - Campo de Pressões

A pressão dinâmica devido à ação da onda na superfície do cilindro de raio  $r=a$  e a uma altura  $y$  qualquer abaixo do nível de repouso, em termos da função potencial  $\phi$ ; computada pela Equação Bernoulli fornece:

$$p = -\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad \text{para } \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad r=a \quad (V.19)$$

ou

$$p = -\rho \left\{ \phi_t + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a^2} \phi_\theta^2 + \phi_y^2 \right] \right\}$$

desprezando os termos de energia cinética local (teoria linear, os termos ao quadrado são negligenciados) vem:

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (V.20)$$

Se o potencial é resolvível a pressão dinâmica sobre o corpo será da forma

$$R_e \{ p e^{-i\omega t} \}$$

onde na Equação Bernoulli linearizada, (Eq. V.20) levando para a Eq. (V.18) tem-se:

$$p = + i p \omega \phi \quad (V.21)$$

e a força total da onda sobre o corpo, omitido o fator tempo será:

$$\underline{F} = + \int_C p \underline{n} d_s \quad \vec{n} = \text{sentido para dentro do corpo}$$

e o momento total sobre um ponto  $\vec{r}_c (0, 0, y_c)$  será

$$\underline{M} = + \int p \underline{n} \times (\vec{r} - \vec{r}_c) d_s \quad (V.22)$$

expandindo a Eq. (V.21) e considerando que as ondas progressivas são envolverão na difração funções de Hankel de 1º tipo, bem como os de Bessel para a onda incidente, não é necessário referenciar o tipo que se está utilizando, já que são todos do 1º

$$\text{então:} \quad H_n^{(1)} = H_n, \quad J_n^{(1)} = J_n,$$

$$H_n' = \frac{d}{dy} (H_n) \quad J_n' = \frac{d}{dz} (J_n)$$

onde:

$$H_n' = J_n' + i y_n'$$

logo

$$P(a, \theta, y) = +pgAi \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \left| J_n(ka) - H_n(ka) \frac{J_n'(ka)}{H_n'(ka)} \right| \cdot \cos n\theta \right\} \quad (V.22)$$

Usando-se a identidade de Wroslkian:

$$J_n'(ka) H_n'(ka) - H_n'(ka) J_n'(ka) = - \frac{2i}{\pi \cdot ka}$$

chega-se a:

$$p(a, \theta, y) = - \frac{\rho g H}{\pi k a} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \epsilon_n \cos n\theta}{H_n'(ka)} \quad (V.23)$$

o campo de pressões dinâmicas em torno e ao longo de uma estrutura cilíndrica são dados nas Figuras V-10a,b, bem como a distribuição das mesmas, devido ao efeito de espalhamento.

#### V.3-4 - Forças e Momentos

A força na direção (+x), por unidade de comprimento axial do corpo na difração de propagação da onda será:

$$\frac{dF_x}{dy} = - a \int_0^{2\pi} p(a, \theta, y) \cos \theta \, d\theta \quad (V.24)$$

Usando-se a Eq. (V.23) na Eq. (V.24) e considerando-se a ortogonalidade dos cossenos, somente o termo  $n=1$  da série permanece; visto que:

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos \theta \, d\theta = \begin{matrix} \pi, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{matrix} \quad (V.25)$$

de onde vem:

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{i 2 \rho g H a}{K a H_1'(ka)} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} e^{-i\omega t} \quad (V.26)$$

a força total sobre o cilindro (para ondas de pequenas amplitudes, referida ao nível da água em repouso) será:

$$F_x = \int_{-h}^0 \frac{dF_x}{dy} \quad (V.27)$$

que resulta

$$F_x = \frac{4 i g A a h \rho}{k a H_1'(ka)} \frac{\operatorname{tg} h (kh)}{k h} \cdot e^{-i\omega t} \quad (V.28)$$

É possível operar-se com  $H_1'(ka)$ , e através de algumas transformações chegar-se a:

$$H_1'(ka) = i e^{-i\delta} (\bar{J}_1'^2 + \bar{Y}_1'^2)^{1/2} \quad (V.28a)$$

ou então

$$\frac{1}{H_1'(ka)} = -i e^{i\delta} \frac{1}{\sqrt{J_1'^2 + Y_1'^2}} = -i e^{i\delta} A(ka) \quad (V.28b)$$

quando,

$$ka \rightarrow 0, \quad A(ka) \rightarrow (\pi/2) (ka)^2 \quad \text{e} \quad \delta \rightarrow (\pi/4) (ka)^2$$

e a força total poderá ser expressa por:

$$F_x = \frac{4 \rho g A a h \operatorname{tg} h kh e^{-i(\omega t - \delta)}}{ka \sqrt{|J_1'(ka)|^2 + |Y_1'(ka)|^2} kh} \quad (V.28c)$$

onde

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{J_1'(ka)}{Y_1'(ka)} \quad (V.28d)$$

o momento total no fundo da direção de  $z$ , será:

$$M_z = + \int_{-h}^0 (y+h) \frac{dF_x}{dy} dy$$

efetuando a integração chega-se:

$$M_z = - \frac{4 i \rho g A a^2}{(ka) \cdot H_1'(ka) k} \left| \frac{(+k \cdot h \sinh(kh) - \cosh(kh) + 1)}{\cosh kh} \right| e^{-i\omega t} \quad (V.29)$$

para mostrarmos a dependência de  $F_x$  e  $M_z$  de  $(ka)$  plotamos  $A(ka)$ , o fator de fase  $\delta(ka)$ , e o coeficiente efeito de inércia  $CM(ka)$ , conforme podemos observar nos gráficos das Figuras (V-3, V-4 e V-5) mostram respectivamente os valores de  $A(ka)$ ,  $\delta(ka)$  (fator de fase) e  $F_x$  em função de variações do parâmetro de espalhamento  $(ka)$

### V.3-5 - Massa Aparente (Virtual)

Podemos definir massa aparente da estrutura como a taxa da força hidrodinâmica agindo sobre esta, para uma aceleração relativa do corpo e fluido no infinito  $|^{111}|$ .

$\underline{a}$  é negativa para o fluido acelerado em  $x = 0$  sem a presença do corpo.

$$\dot{u} = - \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi^I}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}$$

então:

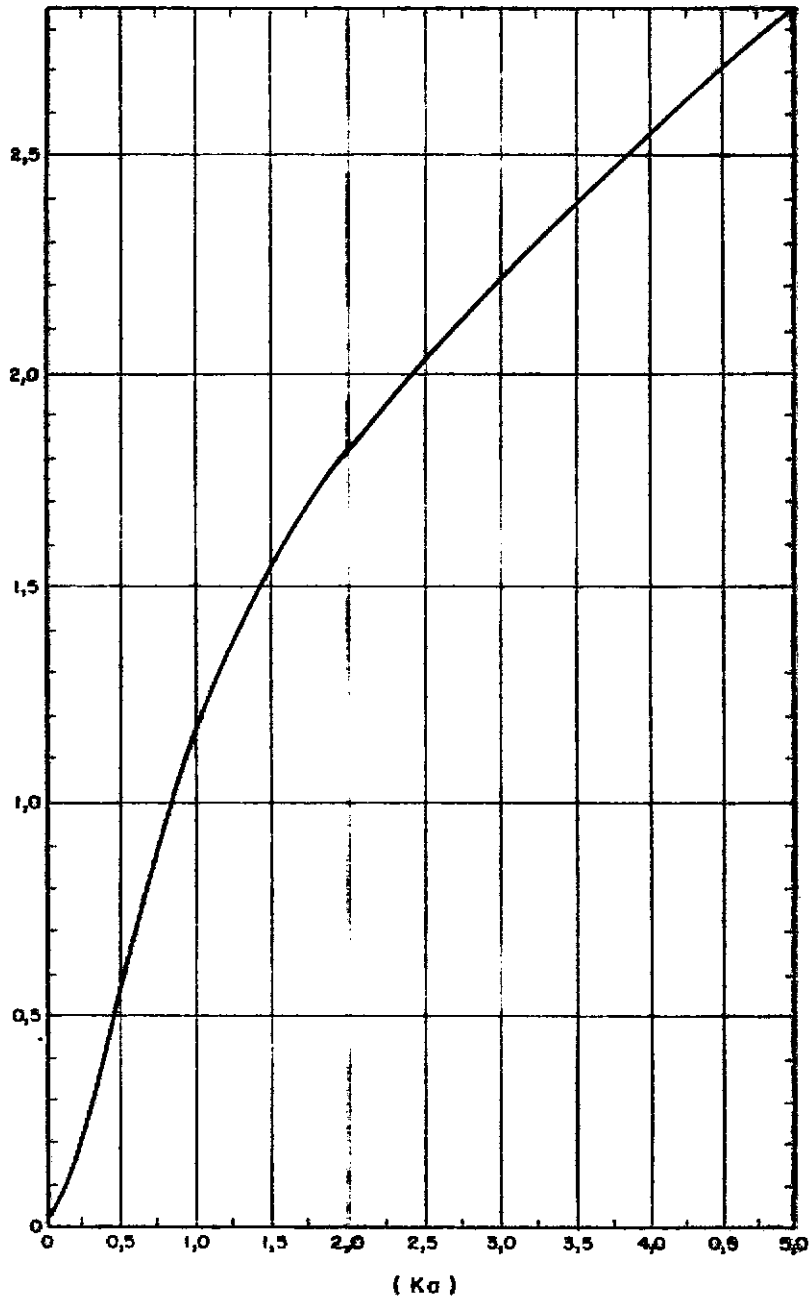
$$\dot{u} = g A k \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \cdot e^{-i\omega t} \quad (V.30)$$

Da Eq. (V.26) se tem:

$$\frac{dF_x}{dy} = + \frac{4 i \rho A g a}{(ka) H_1'(ka)} \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} e^{-i\omega t} \quad (V.31)$$

por outro lado

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{dM_a}{dy} \cdot \dot{u} \quad (V.32)$$

FIG. V.3-Valores de  $A(Ka)$



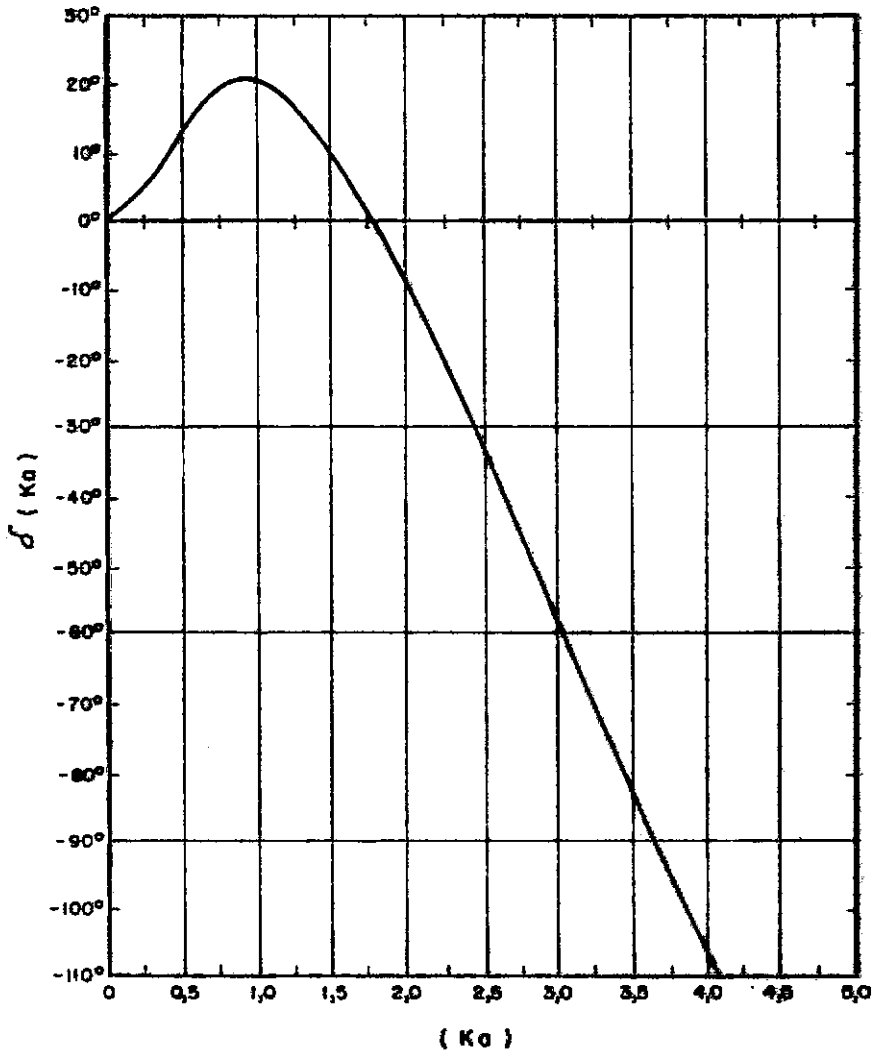


FIG.V.4 - Valores do ângulo de fase (Graus).

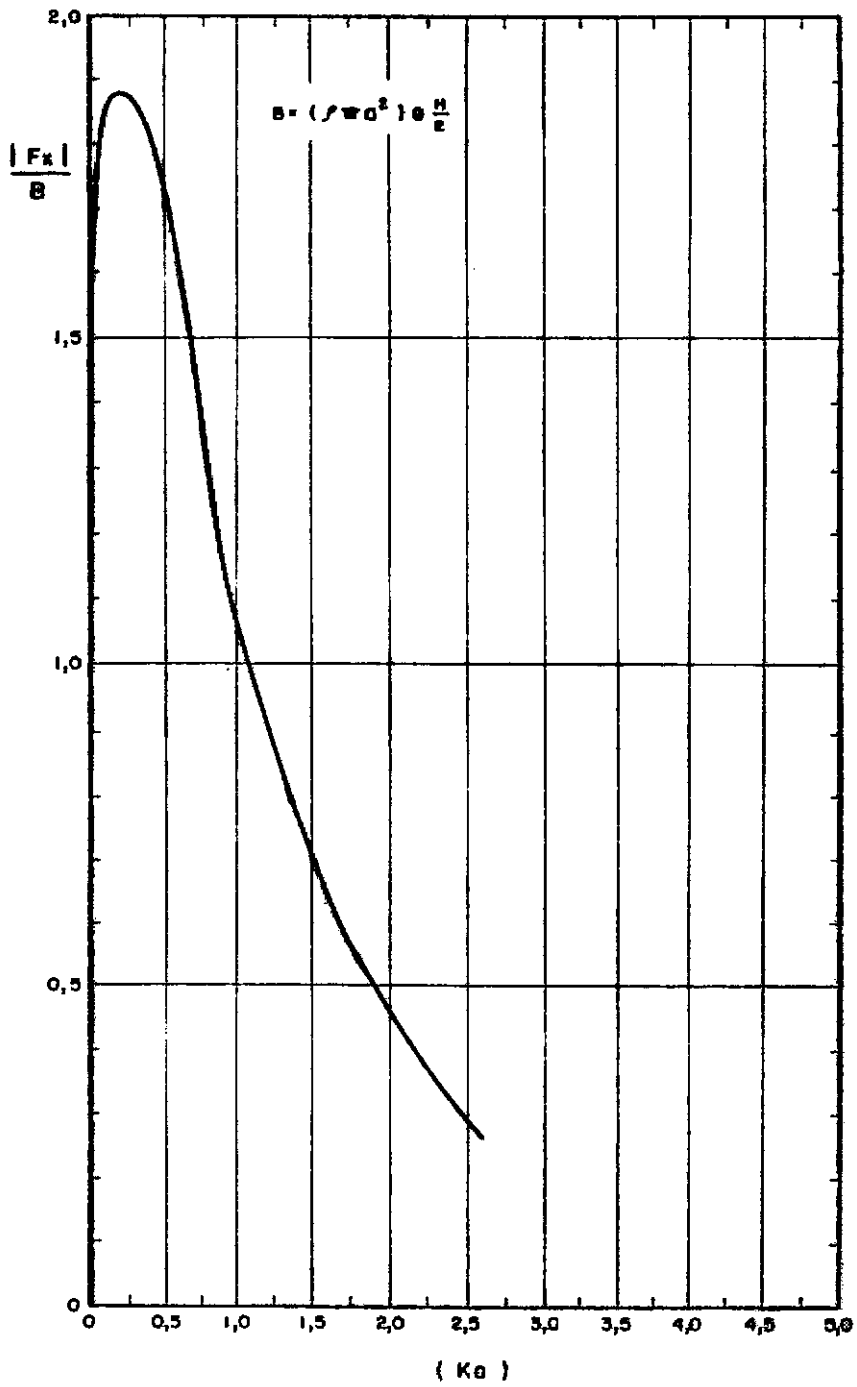


FIG.V.5 - Força Horizontal.

onde a massa aparente de uma porção unitária do cilindro a uma cota  $y$  referida ao nível de repouso será:

$$\frac{d M_a}{d y} = \frac{d F_x}{d y} / \dot{u}$$

levando-se as Eqs. (V.30) e (V.31) para a Eq. (V.32) vem:

$$\frac{4 i \rho a}{(ka) H_1^I(ka) k} = \frac{d M_a}{d y}$$

que multiplicando-se e dividindo-se por  $\pi(ka)$  resulta:

$$\frac{4 i \rho \pi a^2}{\pi(ka)^2 H_1^I(ka)} = \frac{d M_a}{d y} \therefore \frac{d M_a}{d y} = \frac{4 i}{\pi (ka)^2 H_1^I(ka)} \cdot (\rho \pi a^2) \quad (V.33)$$

onde

$$C_M = \frac{4 i}{\pi} \frac{1}{(ka)^2 H_1^I(ka)} \quad (V.34)$$

$$C_M = 1 + C_I = \text{coeficiente efetivo de inércia}$$

ou por Eq. (V.28b) tem-se:

$$C_M = \frac{4 A(ka)}{\pi (ka)^2} \quad (V.34a)$$

A Figura V-6 mostra a variação do coeficiente efetivo de inércia ( $C_M$ ) em função de  $(ka)$ . Quando  $ka \rightarrow 0$ ,  $C_M \rightarrow 2$  (que corresponde ao coeficiente de inércia para a Equação de Morison, em estruturas delgadas.

Levando-se a Eq. (V.34a) para (V.33) resulta:

$$\frac{d M_a}{d y} = C_M \cdot \rho \pi a^2 \quad (V.35)$$

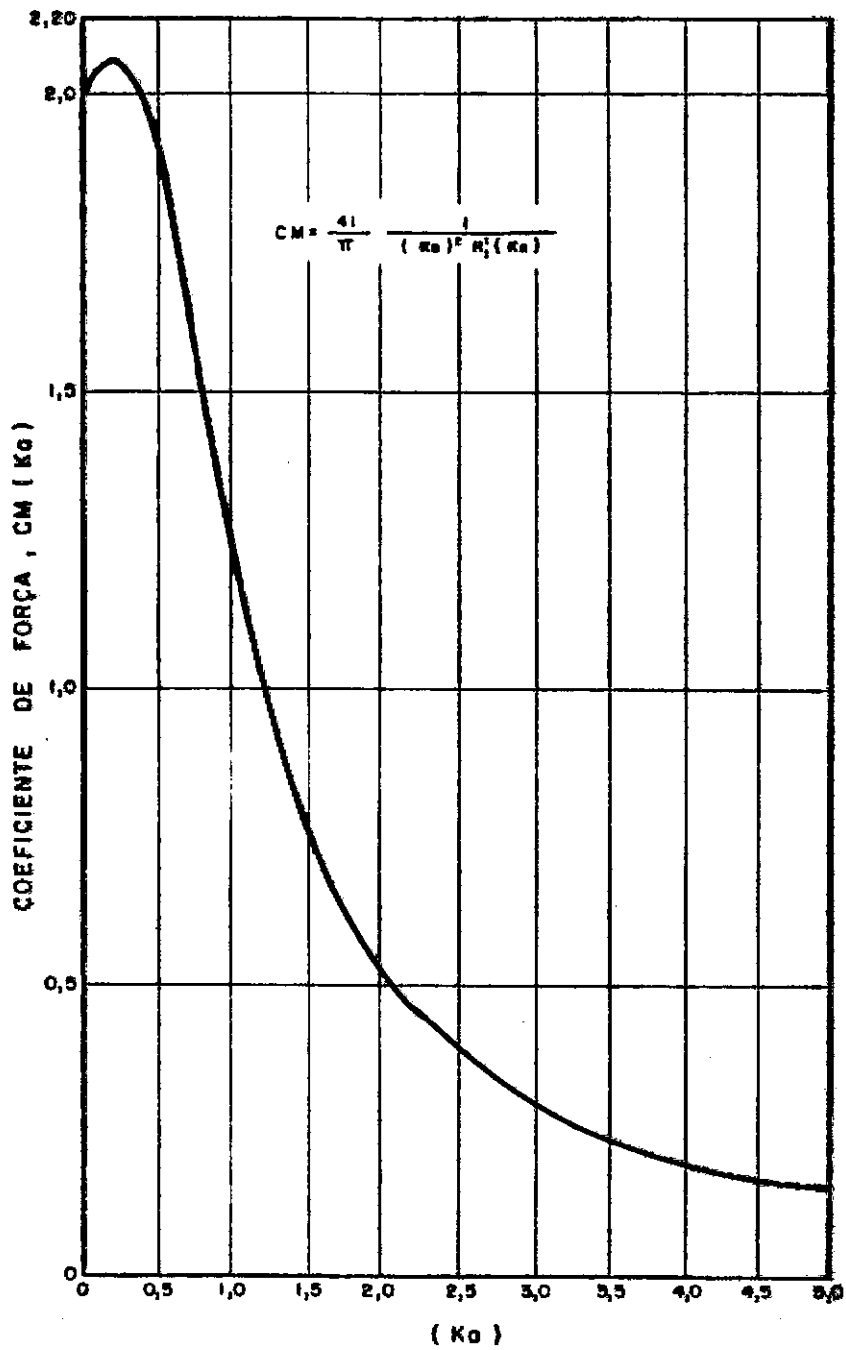


FIG.V.6-Valores do coeficiente efetivo de inércia.

Então:

$$F_H = \int_{-h}^0 \frac{d F_x}{d y} d y$$

Da Eq. (V.32) com (V.30) e (V.33) vem:

$$F_H = \int_{-h}^0 C_M \rho \pi a^2 g A k \frac{\cosh k(y+h)}{\cosh kh} \cos(\omega t - \delta) dy \quad (V.36)$$

$$F_H = \rho (\pi a^2) g A C_M \tanh kh \cos(\omega t - \delta) \quad (V.37)$$

a equação (V.36) pode ser usada para o cálculo da força total, quando a altura da onda é pequena em comparação com a profundidade da água.

Todavia, quando uma maior precisão for requerida, especialmente para grandes alturas relativas da onda ( $H/h > 0,2$ ) [ ], a distribuição da pressão ao redor do cilindro acima do nível de repouso, pode ser tomada como linear; e uma correção a Eq. (V.37) deverá ser feita, devido ao excedente de pressão causado pela variação do perfil da onda, não desprezível, ao redor do corpo.

O limite de integração de  $F_H$  será de  $\int_{-h}^{\eta}$

Para o momento de tombamento ( $M_z$ ), com a Equação (V.34) na Eq. (V.29) resulta:

$$M_z = C_M \frac{\rho \pi a^2 A g}{k} \left| \frac{kh \sinh(kh) + 1 - \cosh kh}{\cosh(kh)} \right| \cos(\omega t - \delta) \quad (V.38)$$

$A(kh)$

Então a Eq. (V.38) se transforma em:

$$M_z = C_M \rho \pi a^2 A \frac{A(kh)}{k} \cos(\omega t - \delta) \quad (V.39)$$

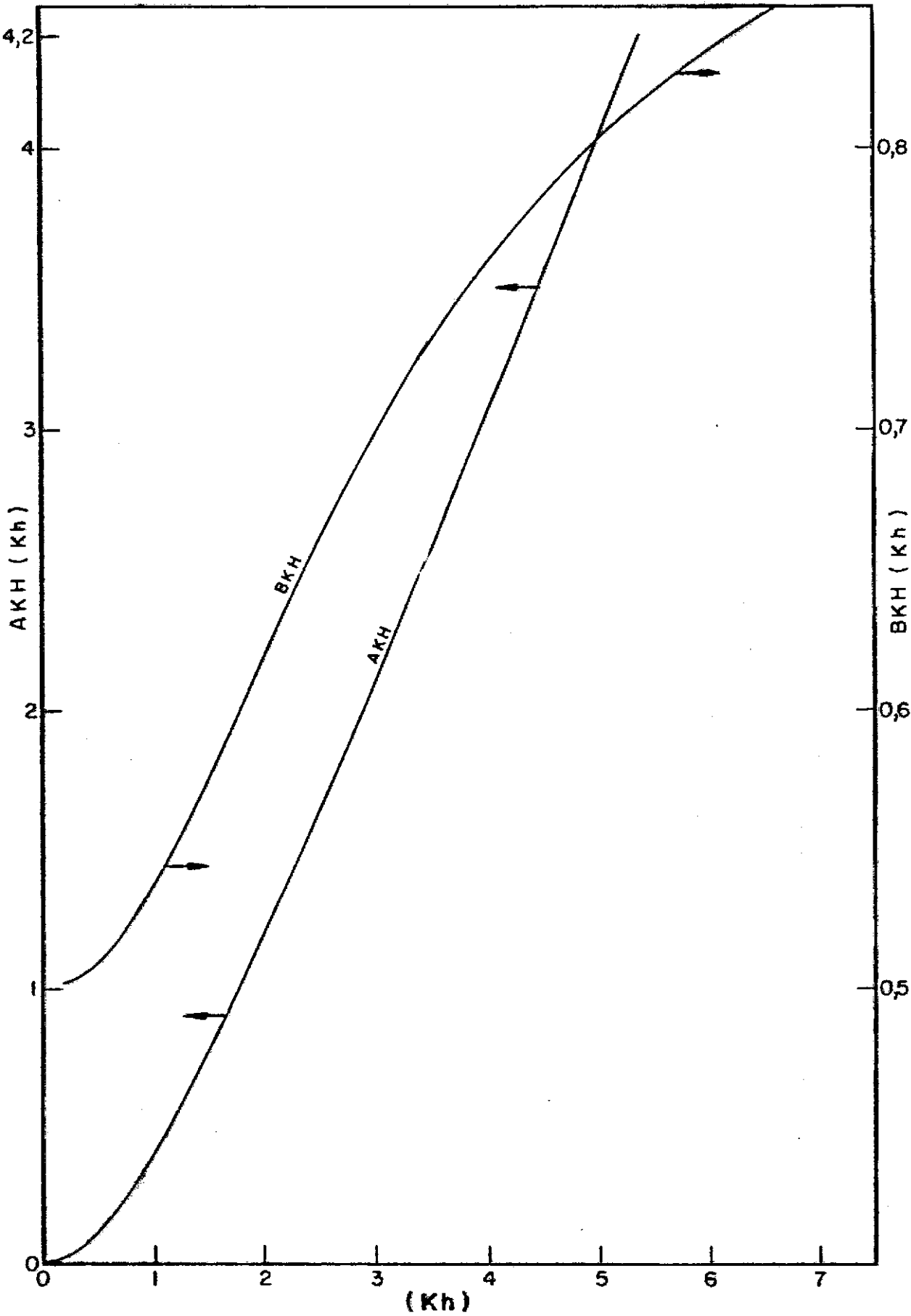


FIG. V.7 - Valores de  $AKH(Kh)$  e  $BKH(Kh)$  versus  $(Kh)$ .

Trabalhando-se com  $A(kh)/k$  resulta:

$$\frac{A(kh)}{kh} = \left( \frac{1 - \cosh(kh) + kh \sinh(kh)}{kh \sinh(kh)} \right) \times \tanh(kh) \cdot kh$$

$$B(kh)$$

$$\therefore B(kh) = A(kh) / (kh \tanh(kh)) \quad (V.39)$$

ou

$$\frac{A(kh)}{k} = B(kh) \cdot \tanh(kh) \cdot h \quad (V.40)$$

Na Figura V-7 são plotados os valores das funções  $A(kh)$  e  $B(kh)$ , mostrando suas dependências do parâmetro  $(kh)$ .

Levando-se a Eq. (V.40) para (V.38), tem-se:

$$M_z = C_M (\rho \pi a^2) g \frac{H}{2} \cdot \tanh(kh) \cdot B(kh) \cdot h \quad (V.41)$$

ou

$$M_z = F_H \cdot B(kh) \cdot h \quad (V.42)$$

O ponto de aplicação da força horizontal resultante ( $\bar{x}$ ) será:

$$\bar{x} = M_z / F_H = B(kh) \cdot h \quad (V.43)$$

Os máximos valores serão:

$$F_H^{\max} = \frac{\pi(\rho \pi a^2)H}{T^2} C_M(ka) \quad , \quad M_z^{\max} = \frac{1}{4} \rho g^2 H L C_M(ka) \cdot A(kh) \quad (V.44)$$

As Figuras V-8 e V-9, apresentam respectivamente a variação dos máximos valores adimensionais da força horizon

tal ( $F_H$ ) e do momento de tombamento ( $M_z$ ), em função de ( $kh$ ) para vários ( $ka$ ); inclusive deixando evidenciado a independência destas grandezas, da profundidade relativa ( $kh$ ), quando esta cresce muito ( $kh \rightarrow \infty$ ).

### V.3-6 - Elevação da Superfície Livre

O perfil da elevação da superfície livre pode ser obtido através da Eq. (V.3)

$$\eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (V.45)$$

onde

$$\frac{\partial \eta(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \eta^I(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial \eta^S(r, \theta)}{\partial r}, \quad r = a$$

cuja solução é:

$$\eta(r, \theta) = A i \sum_{n=0}^{\infty} e_n (i)^n \left| J_n(kr) - H_n(kr) \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} \right| \cos n\theta \quad (V.46)$$

Usando a identidade de Wrosnkian, chegamos:

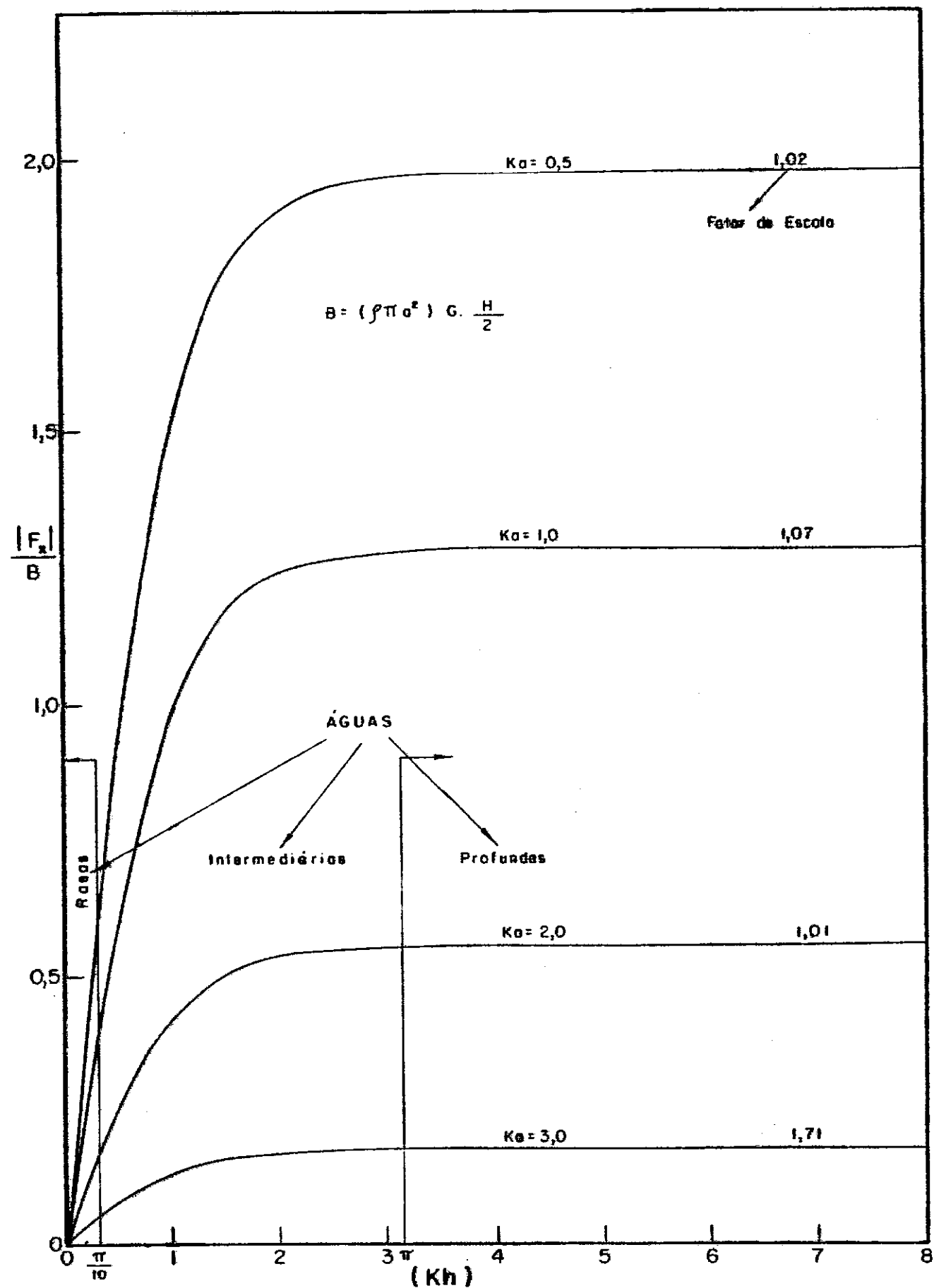
$$\eta(a, \theta) = - \frac{2A}{\pi k a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n (i)^n \cos n\theta}{H'_n(ka)} \quad (V.47)$$

A Eq. (V.47) possui semelhança com o termo da série na Eq. (V.23), que também pode representar o deslocamento normalizado da superfície livre para uma amplitude unitária ao redor do cilindro.

Então:

$$f_e = \frac{\eta(r, \theta)}{A} \Big|_{A=1} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n (i)^{n+1} \left| J_n(kr) - H_n(kr) \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} \right| \cos n\theta$$



FIG.V.8 - Valores de  $F_x$  em função de  $(Kh)$  para vários  $(Ka)$ .

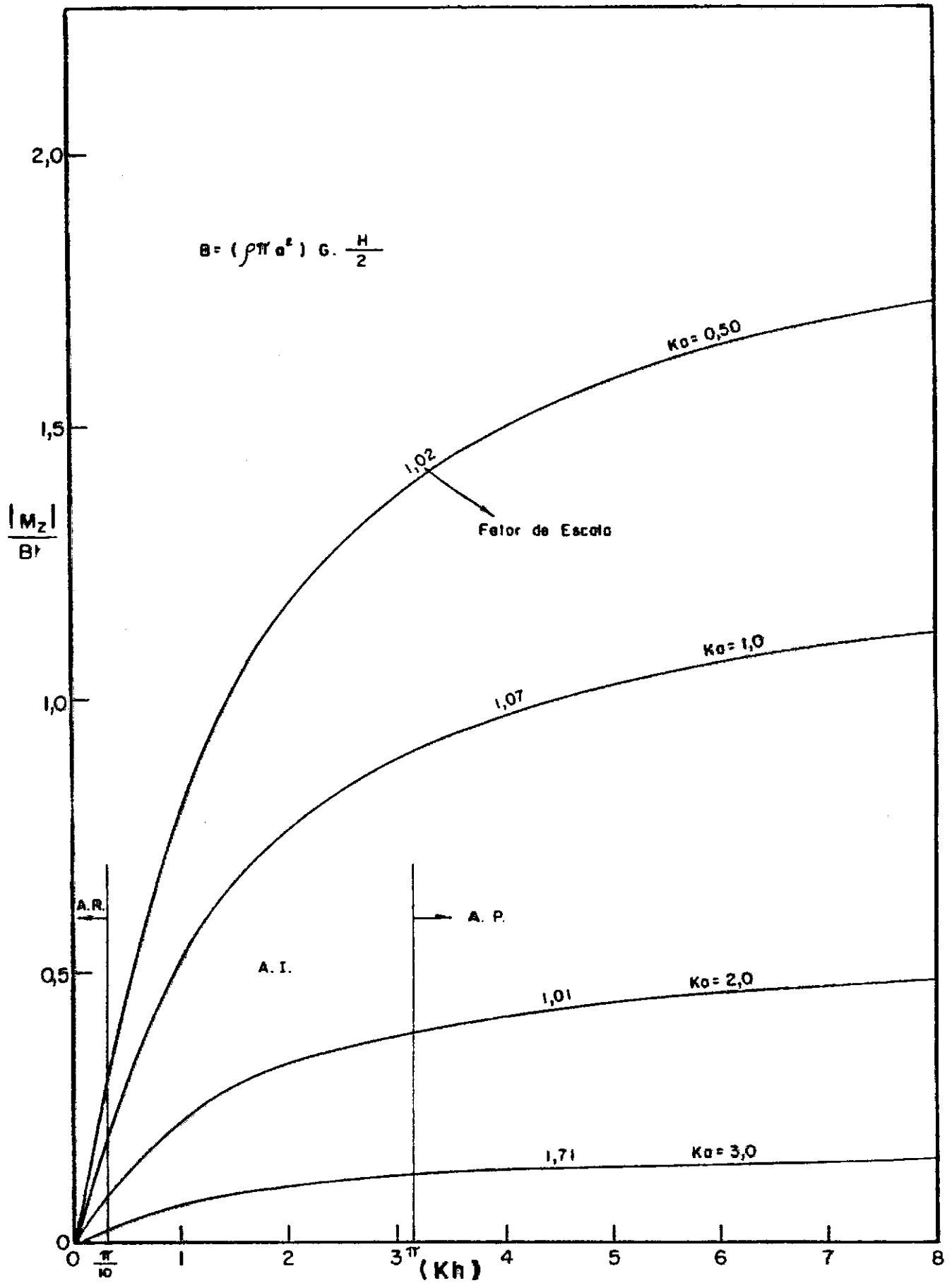


FIG.V.9 - Momento de tombamento ( $M_z$ ) em função de  $(Kh)$  para diversos  $(Ka)$ .

Que também representa a elevação relativa da su perfície livre, para uma amplitude unitária da onda; e que na verdade caracteriza o efeito de espalhamento (definição dada na Seção V.2) é denominado de fator de espalhamento. Este fator ( $f_e$ ) é o responsável pela simulação da perturbação identificado ra do fenômeno do espalhamento (difração).

Os gráficos polares da Figura V-10) mostram o fa tor de espalhamento ao redor de uma estrutura cilíndrica para vários ( $ka$ ).

Ainda com respeito a caracterização física do efeito de espalhamento definido na Seção V-2, a Figura V-11, mos tra as linhas que unem pontos de mesmo valor da relação altura resultante, e altura da onda incidente para o modelo do espalha mento calculado para  $ka = 1,4$  <sup>[171]</sup>.

Observando-se a Figura V-11, pode-se notar re giões onde as ondas são mais altas, bem como regiões onde as on das são mais baixas que as ondas incidentes; o que sugere uma região mais amena atrás da obstrução, que indiscutivelmente apre senta grandes vantagens <sup>(3)</sup>.

A expressão (V.47) é plotada na Figura V-12 e mostra a elevação relativa da superfície livre ao redor da es trutura para vários valores de ( $ka$ ). Nota-se que para estrutu ras de pequenas dimensões ( $ka > 1$ ) a superfície livre se desen volve suavemente em torno da estrutura, ao contrário do que acontece, para altos valores de  $ka$ .

#### V.4 - OUTRAS FORMULAÇÕES PARA O PROBLEMA DA DIFRAÇÃO

Várias teorias da difração tem sido desenvolvi das para a análise das forças de ondas sobre grandes estruturas mas, geralmente o custo impede o seu uso no estágio de formula

---

(3) Por exemplo, para a atracação de embarcações.

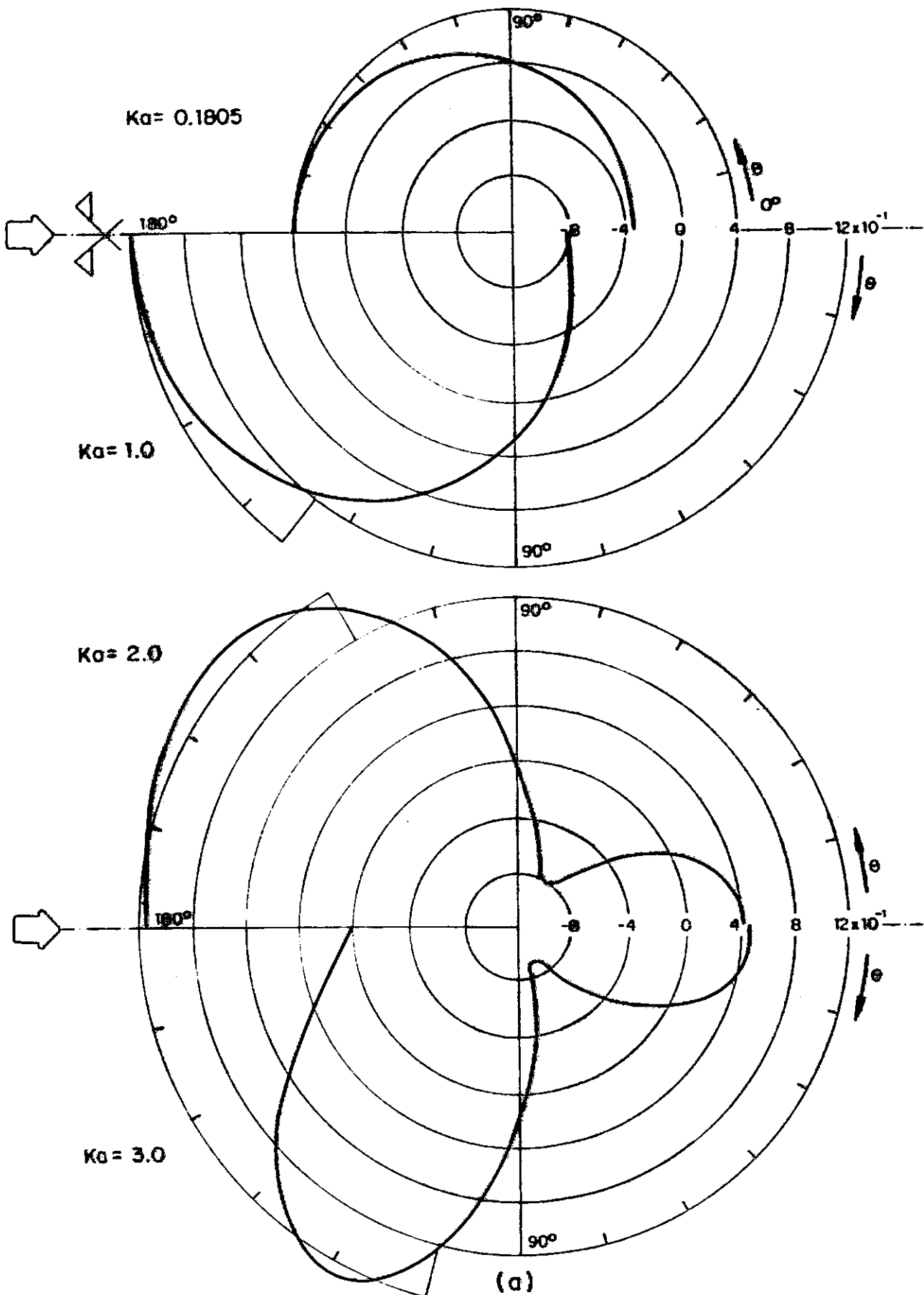
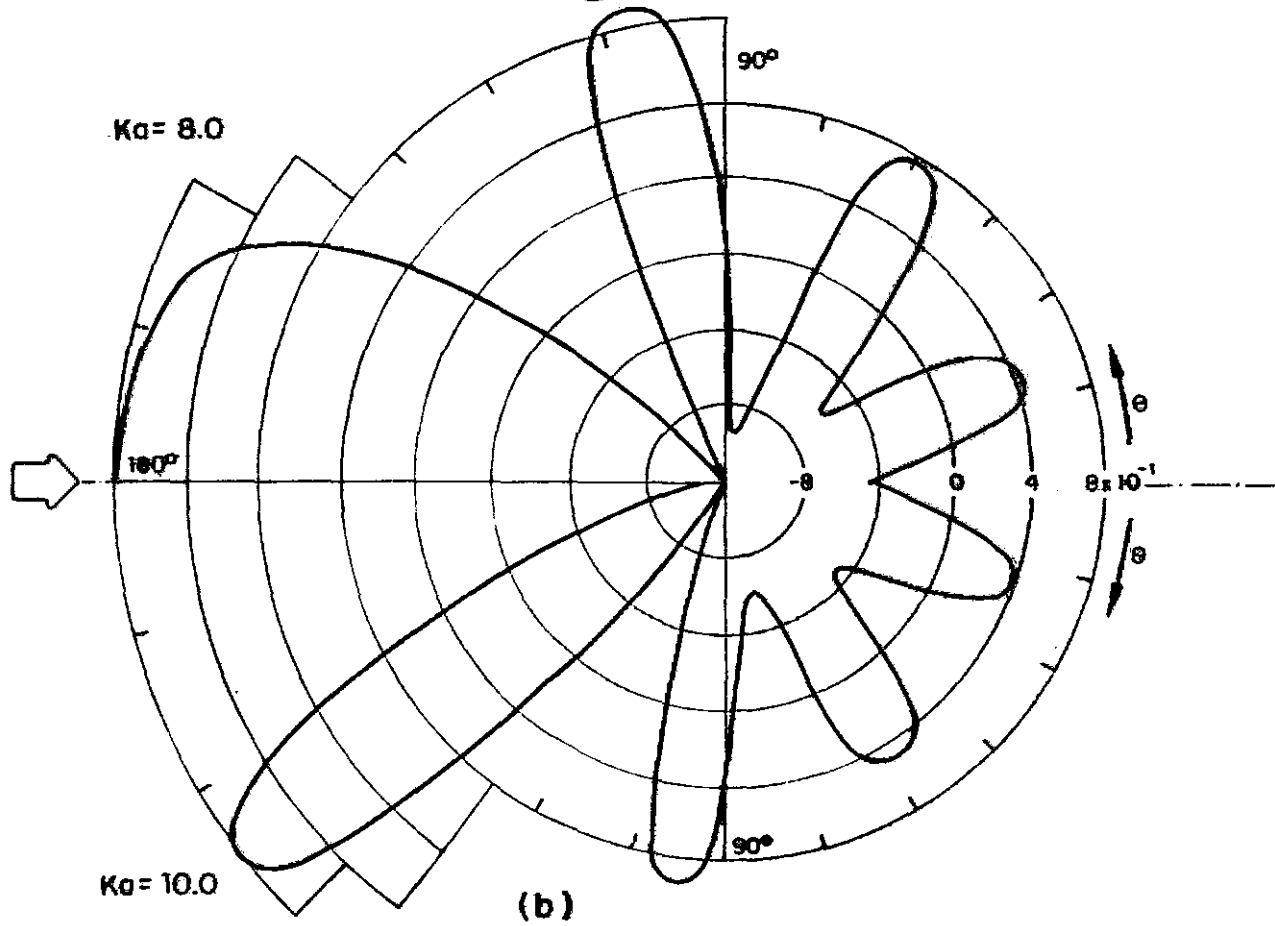
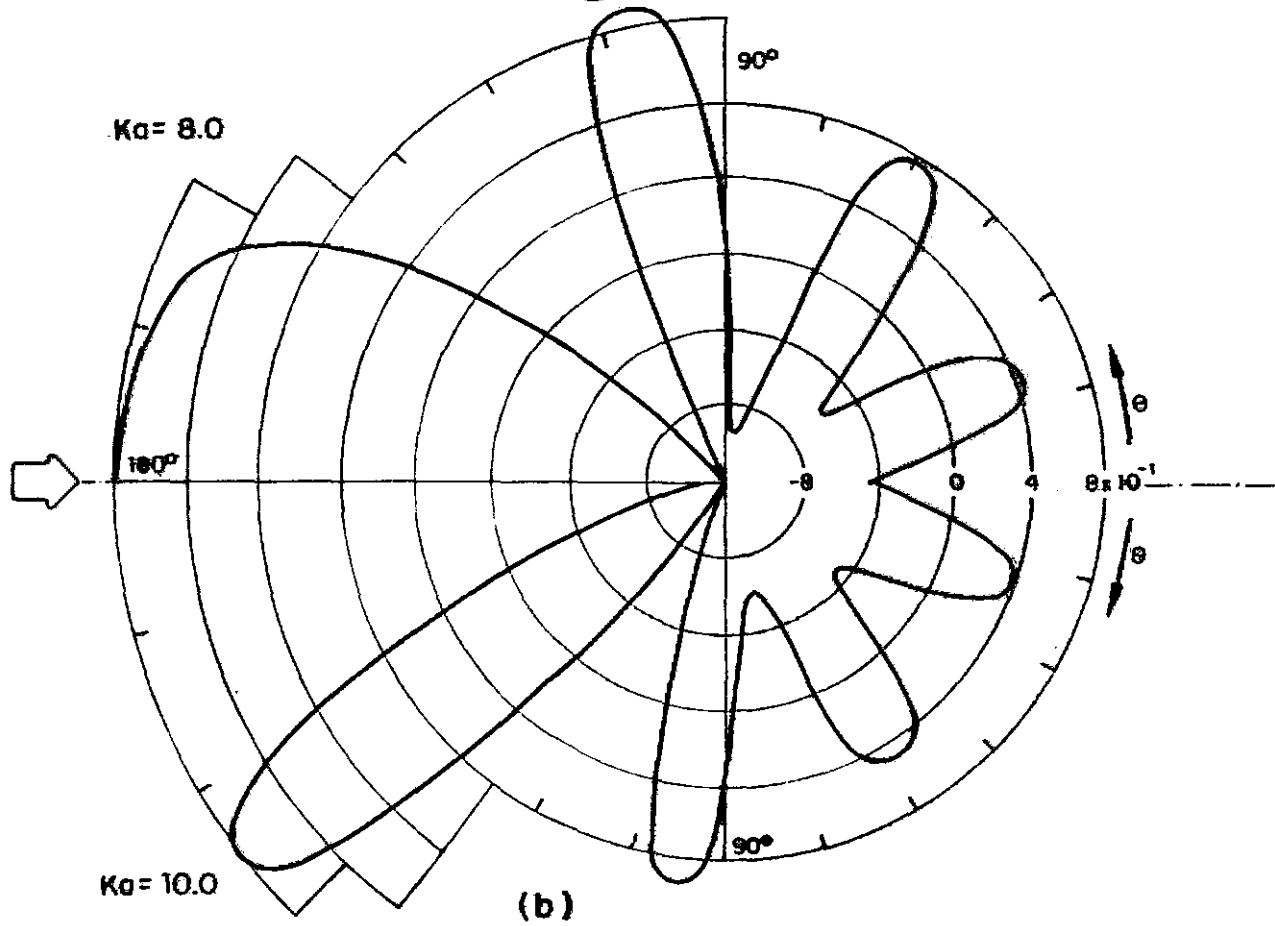
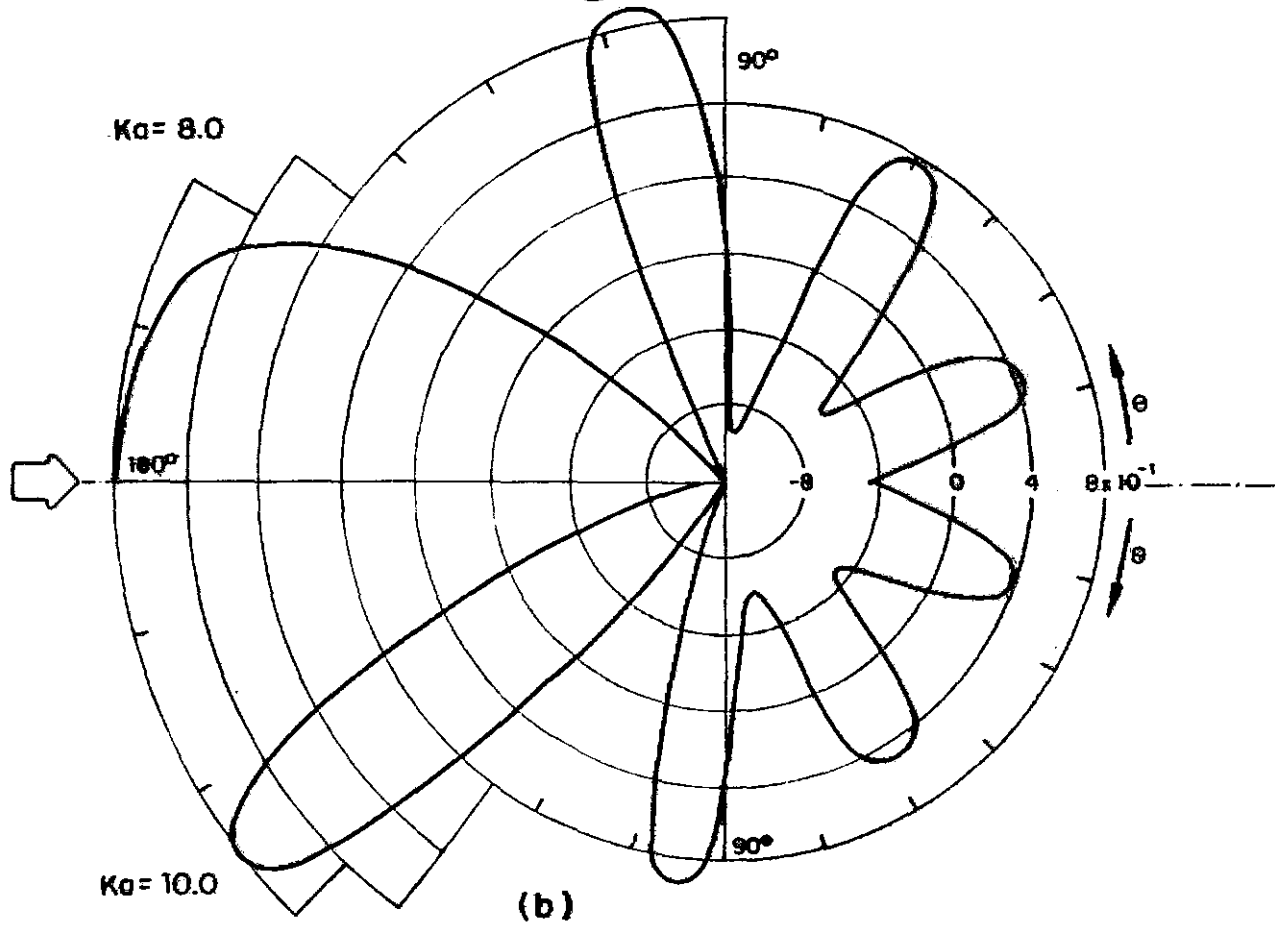
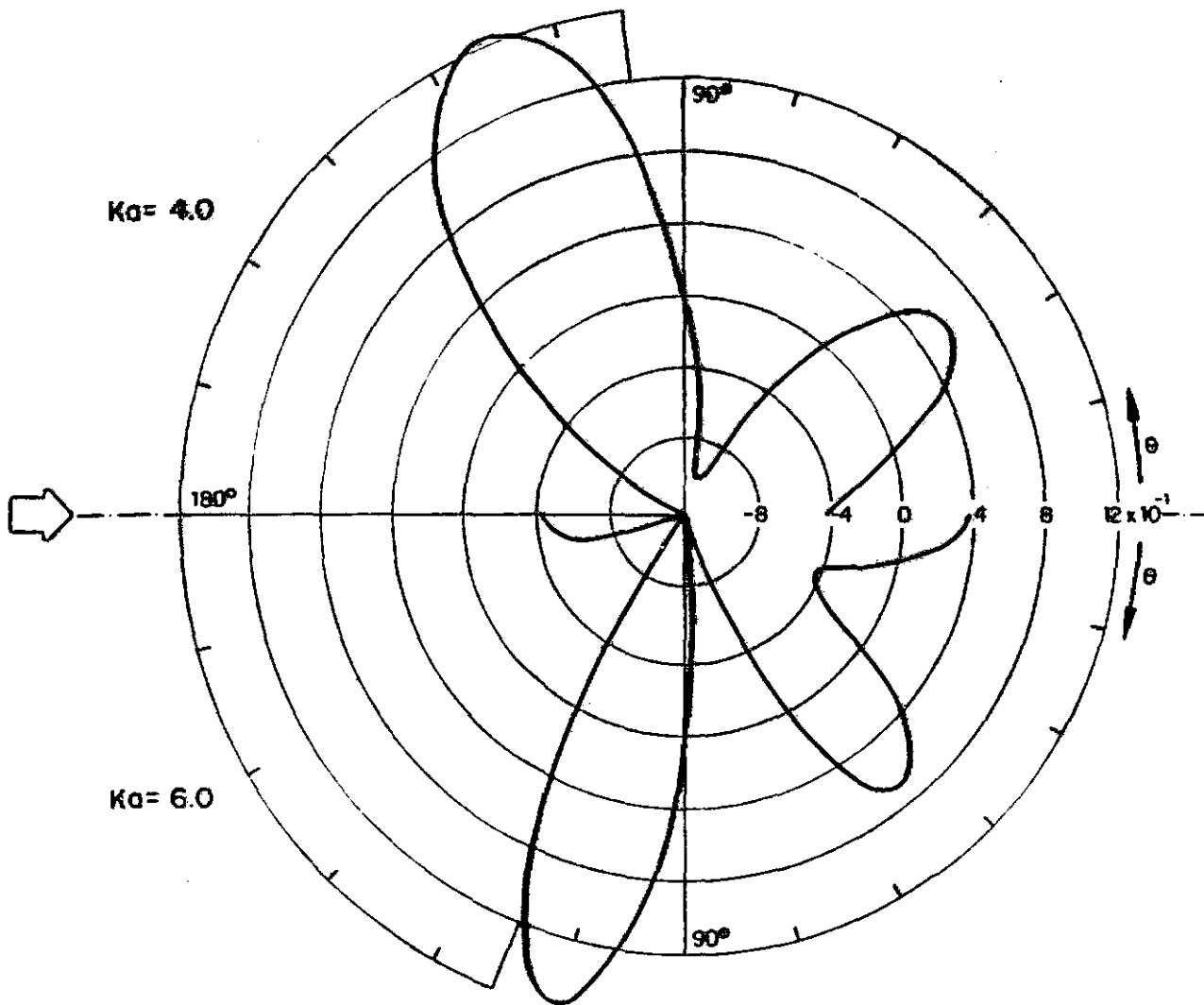


FIG. V.10 - O diagrama polar mostra o fator de espalhamento ao redor de um corpo cilíndrico. A distribuição de pressões  $(p/p_0)$  e a elevação relativa da superfície livre  $(\eta/H)$  correspondem respectivamente: 0.32 e 0.5 deste fator.



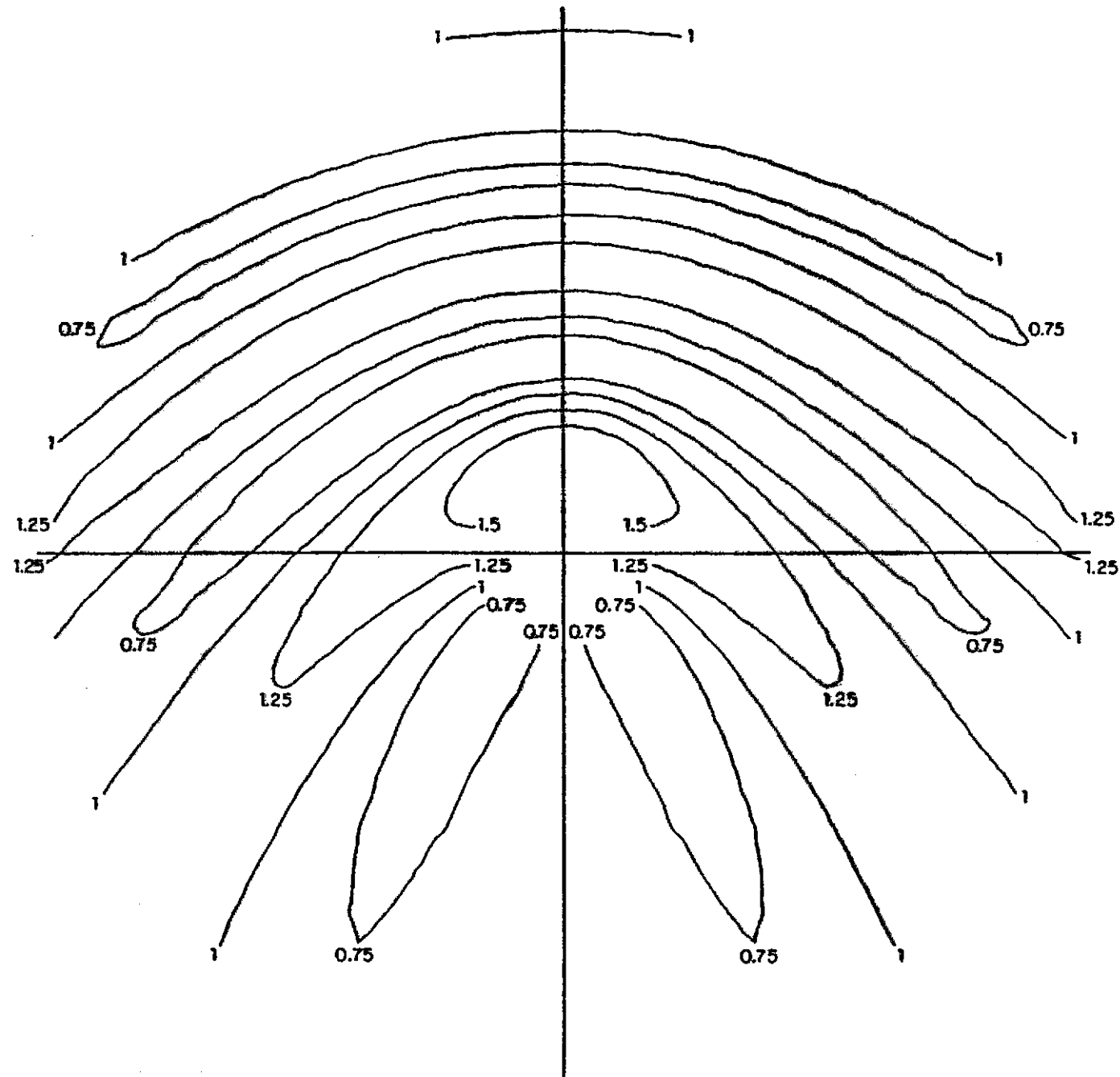


FIG. V.11 - Distribuição das elevações relativas da superfície livre ao redor do corpo -  $Ka = 1.4$ .

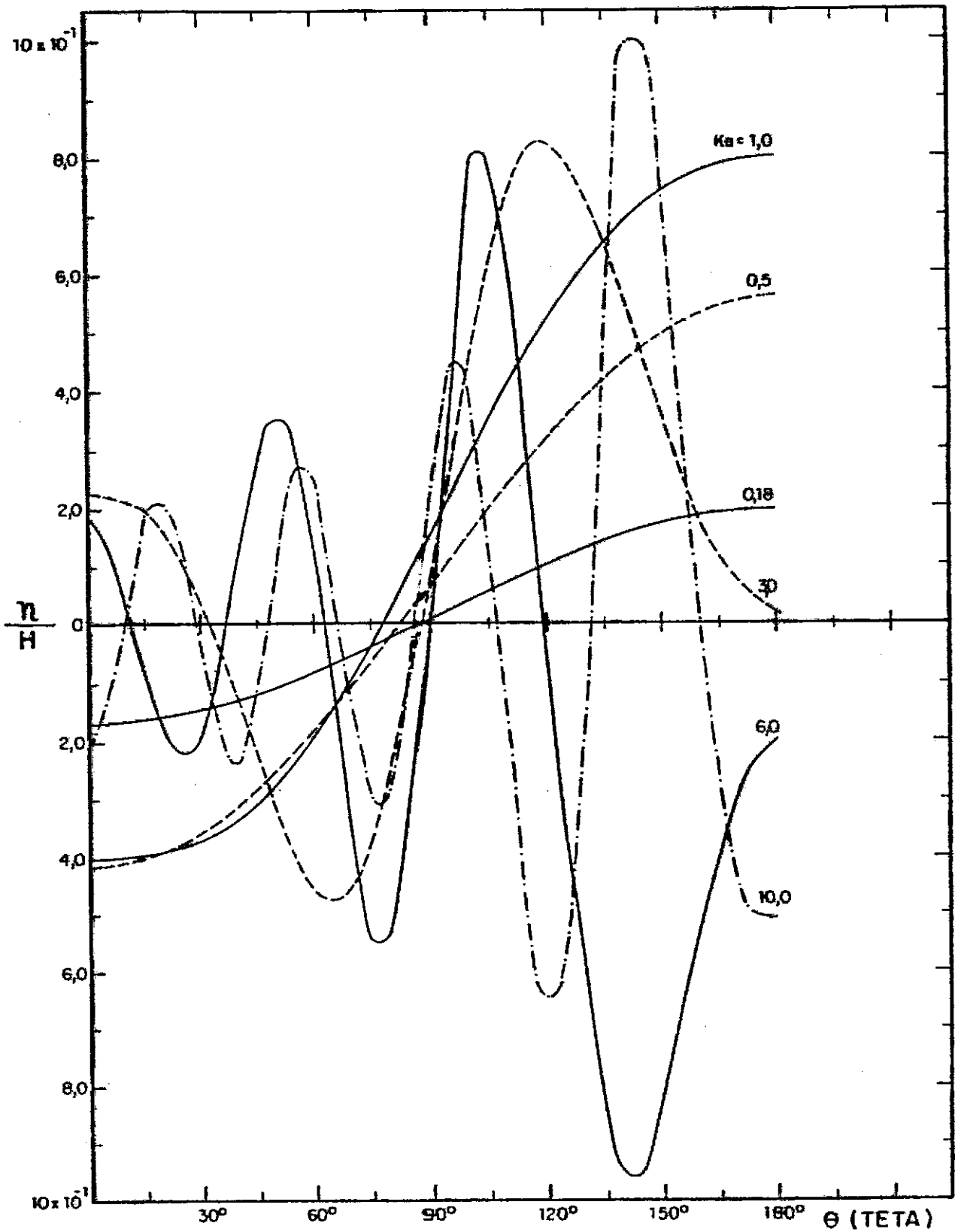


FIG. V.12 - Elevação relativa da superfície livre ao redor do corpo, para vários ( $Ka$ ).

ção do projeto.

Vários resultados experimentais, como os que se se rão mostrados, vêm confirmar as potencialidades da teoria li-near, na abordagem do problema da difração, dentro de seus itens limitantes.

Para estruturas de forma arbitrária o problema é resolvido de maneira aproximada [142], [6], usando-se o mêtodo das funções de Green [183], conduzindo-se a solução, as equações integrais. Isto é feito numericamente por uma representação da forma do corpo por um número de elementos planos e resolvida a equação matricial resultante. Se o corpo é de forma complicada e com muitas faces, grandes matrizes são necessárias. Todavia, o problema pode ser resolvido de uma maneira mais econômica se o corpo for simétrico [142], em relação a um eixo. No caso de simetria axial, técnicas "*standard*" de análise de Furier são usadas para reduzir as equações integrais de duas dimensões, sobre toda a superfície de corpo, para uma equação unidimensional ao longo da curva formada pela interação do plano axial com o corpo.

Usando-se esta redução o tempo de computação cai de  $1/10^2$  -  $1/10^3$  do caso original.

Os resultados destes programas têm sido comparados com testes experimentais, com modelos de concreto - grávida de [41], apresentando bons resultados.

E mais recentemente, o método dos elementos finitos, [32], [183], [161] aplicados ao problema da difração, tem conduzido a resultados muito bons, o que tem incentivado o implemento do seu uso.



## V.5 - DIFRAÇÃO NÃO LINEAR E VISCOSA

Muitos têm sido os trabalhos dedicados ao estudo da difração, levando em conta as não linearidades das ondas<sup>[72]</sup>, <sup>[20]</sup>, <sup>[71]</sup>, <sup>[128]</sup>, <sup>[131]</sup> e etc..., todavia, é notável o trabalho de Chakrabarti<sup>[23]</sup>; que usou a teoria de Stokes-V para a onda incidente, e obteve a força de difração através da soma das cinco componentes, que constitui a onda não linear, para uma dada frequência fixa.

Seu procedimento foi semelhantes ao adotado neste trabalho, diferindo apenas no que tange a composição de cada grandeza, que é formada por um somatório de cinco termos, ou seja:

$$f(\omega, y, t) = \sum_{\alpha=1}^5 c_{m\alpha} (\rho \pi a^2) \dot{u}_{\alpha} \quad (V.48)$$

onde

$$\dot{u}_{\alpha} = k \omega \alpha^2 \lambda \cosh \left| k(y+h) \right| \cos (\alpha \omega t - \delta_{\alpha}) \quad (V.49)$$

$\lambda$  é um parâmetro de amplitude para a teoria de 5.<sup>a</sup> ordem.

$$\operatorname{tg} \delta_{\alpha} = J_1'(\alpha k a) / y_1'(\alpha k a) \quad (V.50)$$

e

$$c_M = \frac{4}{\pi (\alpha k a)} \frac{1}{\{ |J_1'(\alpha k a)|^2 + |Y_1'(\alpha k a)|^2 \} \frac{1}{2}} \quad (V.51)$$

Os gráficos das Figuras (V-4), (V-5) e (V-6) representam estas quantidades para  $\alpha = 1$  (teoria linear).

Posteriormente num outro trabalho<sup>[189]</sup>, Chakrabarti procurando considerar os efeitos da viscosidade, formulou o problema da difração, resolvendo a equação de Navier-Stokes linearizada para uma estrutura cilíndrica, decompondo o campo de ve-

locidades do fluido numa parte irrotacional (teoria potencial) e outra rotacional (levando em conta os efeitos viscosos), obtendo uma expressão do tipo da fórmula de Morison, onde existe um termo de arraste, que está mais associado as tensões tangenciais, do que os efeitos de esteira, como acontece no termo de arraste da Equação de Morison.

O potencial de velocidades de 5.<sup>a</sup> ordem é dado por:

$$\begin{aligned} \phi = \frac{\bar{C}}{\beta} = & (\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13} + \lambda^5 A_{15}) \cosh(\beta y) \sin(\theta) + \\ & + (\lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24}) \cosh(2\beta y) \cdot \sin(2\theta) + (\lambda^3 A_{33} + \lambda^5 A_{35}) \times \\ & \times \cosh(3\beta y) \cdot \sin(3\theta) + \lambda^4 A_{44} \cosh(4\beta y) \cdot \sin(4\theta) + \\ & + \lambda^5 A_{55} \cosh(5\beta y) \sin(5\theta) \end{aligned} \quad (V.52)$$

Resolvendo-se as duas Equações (1.14) e (1.15), da Ref. [105] Apêndice I, ou por [34], simultaneamente tem-se os valores de  $(\frac{h}{L})$  e  $\lambda$  e todas as características da onda são determinadas.

#### V.5-1 - Aplicação

Seja uma estrutura cilíndrica de altura 6,1 m, submersa numa lâmina d'água de 18,3 m.

São dados:

$h = 18,3 \text{ m}$	$L = 129 \text{ m}$
$H = 9,1 \text{ m}$	$h/L = 0,142 \text{ m}$
$T = 10 \text{ s}$	$kh \approx 0,89$
$a = 7,6 \text{ m}$	$ka \approx 0,37 \rightarrow \delta_1 = 0,107 \text{ rd}_s$

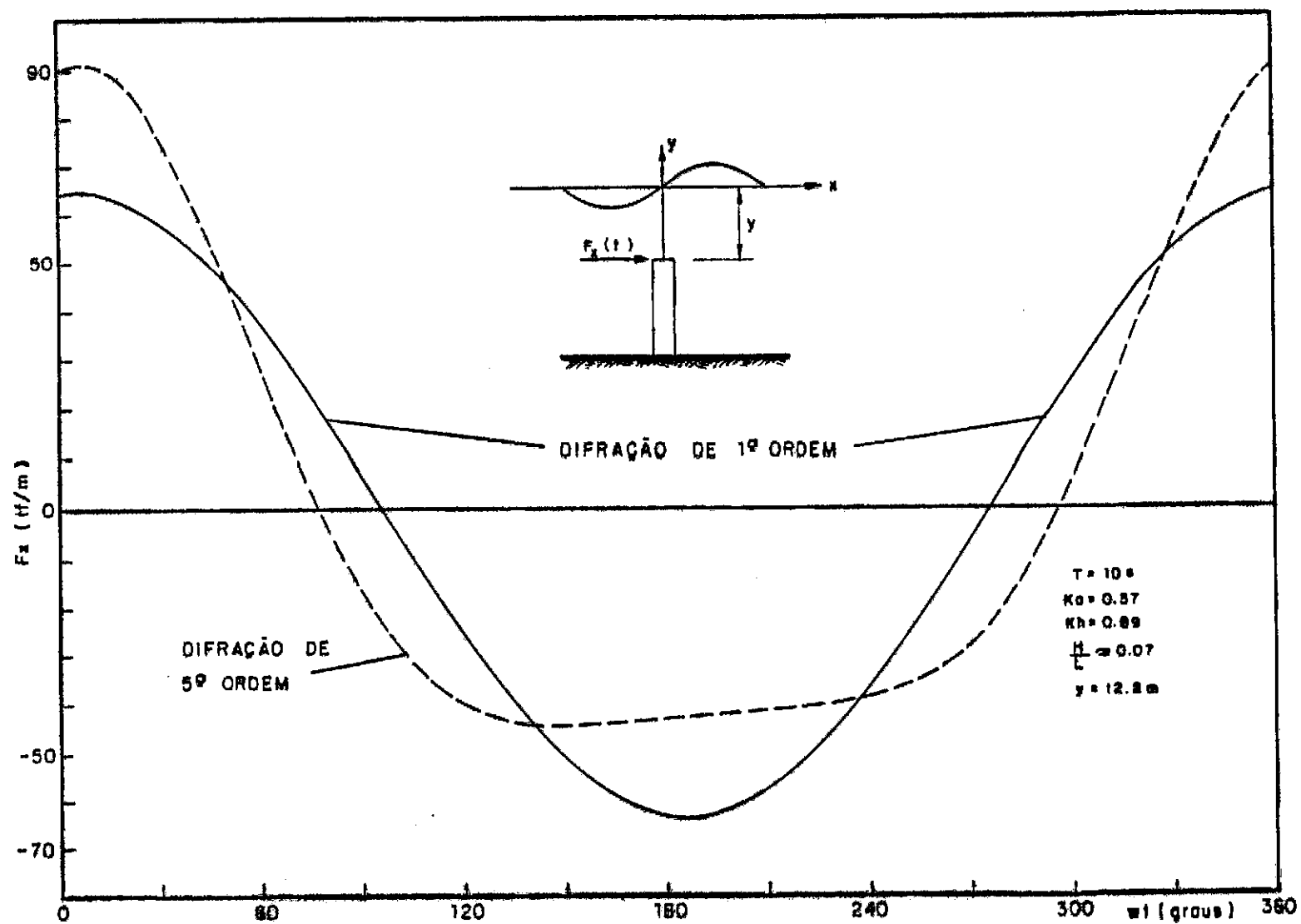


FIG. V.13 - Comparação da força por unidade de comprimento (tf/m) para a solução linear e não linear (Stokes - V).

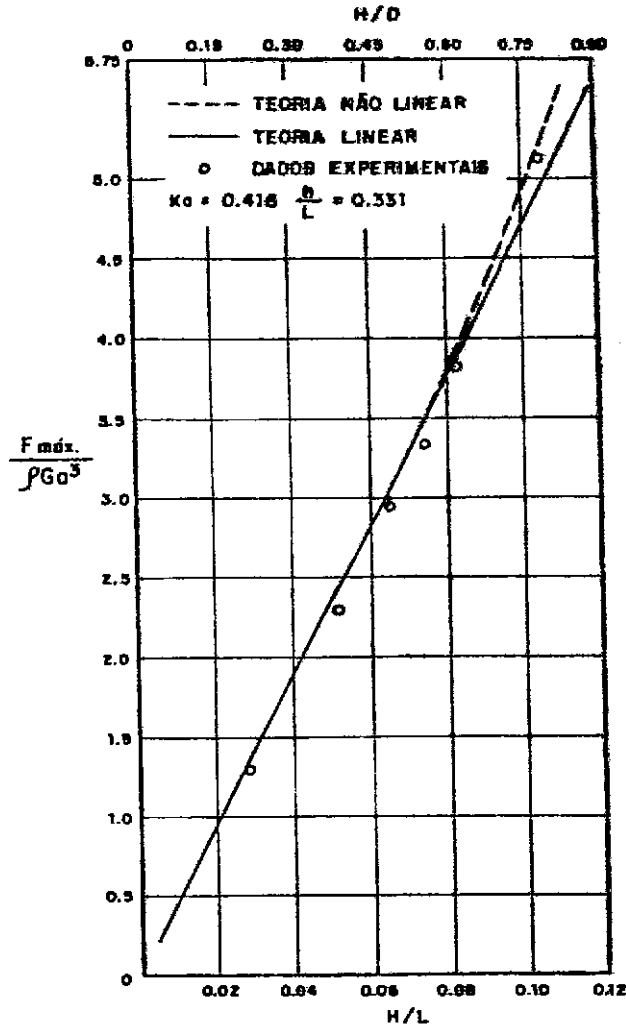


FIG. V. 13c - Força horizontal. (Ref. 131)

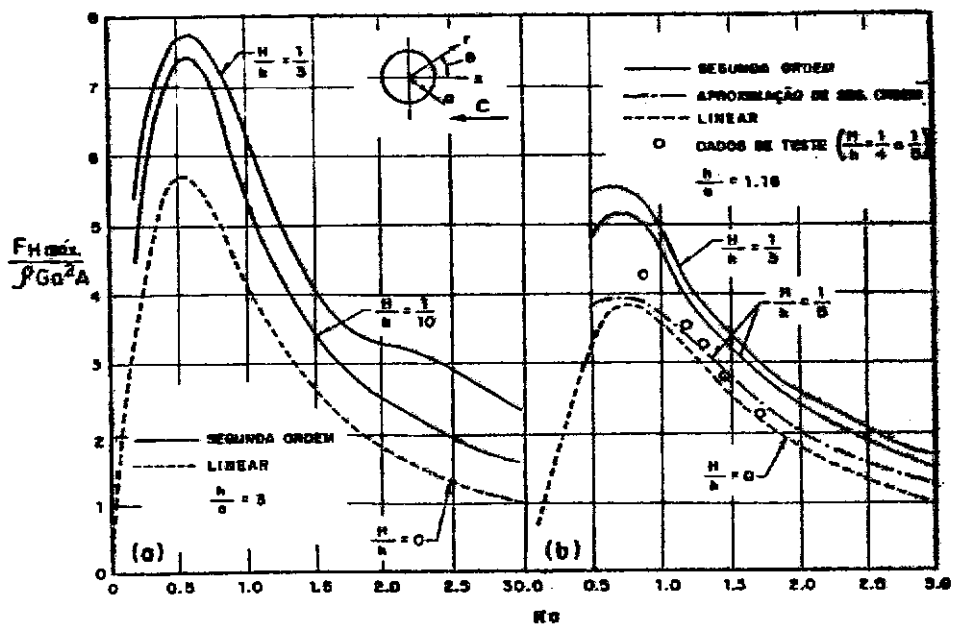


FIG. V. 13 - (a) Efeitos não lineares devido às forças de onda de 2ª ordem  
 (b) Comparação entre a solução linear e de 2ª ordem, com dados experimentais. (Ref. 24)

A teoria de 5.<sup>a</sup> ordem fornece os coeficientes:

$$\begin{array}{lll}
 A_{11} = 0,9849 & A_{22} = 0,3528 & A_{35} = 0,3849 \\
 A_{13} = -2,6235 & A_{24} = -0,6967 & A_{44} = -0,0088 \\
 A_{15} = -5,5769 & A_{33} = 0,0685 & A_{55} = -0,0103
 \end{array}$$

A máxima força por unidade de comprimento será:

Da Eq. (V.48) tem-se

$$f = (\rho \pi a^2) \omega \sum_{\alpha=1}^5 C_{m\alpha} (\alpha \lambda_{\alpha}) \sinh(k h) \cos(\alpha \omega t - \delta \alpha)$$

que resulta

$$\begin{aligned}
 f = & 43065,6 \cos(\omega t - 0,107) + 16.123 \cos(2\omega t - 0,3) + \\
 & 2204,3 \cos(3\omega t - 0,337) - 101,7 \cos(4\omega t - 0,207) - \\
 & - 48,5 \cos(5\omega t - 0,017)
 \end{aligned}$$

O máximo valor de  $f$  para a profundidade de 6,1 m, é obtido para  $\omega t = 0,1396$  rds, e vale  $f_{\max} = 91,076 \text{ t}_{f/m}$

Para a teoria linear Eq. (V.26) tem-se:

$$f_{\max}^l = 63.397,22 \cos(\omega t - 0,1053) = 63,397 \text{ t}_{f/m}$$

A Figura V-3 mostra mais esclarecidamente, para as características do presente problema, uma comparação dos valores da força por unidade de comprimento, para a difração linear e de 5.<sup>a</sup> ordem.

Por outro lado o gráfico da Figura V-13 mostra uma comparação entre as soluções de 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> ordem, e os resultados experimentais  $|^{131}|$ , para o problema da difração, em função dos parâmetros mais caracterizadores das não linearidades

$$\left(\frac{H}{D} \text{ e } \frac{H}{L}\right).$$

Para valores crescentes de  $(kh)$  os efeitos não lineares decrescem, todavia, estes efeitos aumentam com o crescimento das relações:  $\left(\frac{H}{L} \text{ e } \frac{H}{D}\right)$ .

Os resultados da Figura (V-14a,b) |<sup>24</sup>|, complementam a gravura anterior. Estão em jogo aí, três parâmetros importantes  $(ka, \frac{H}{h} \text{ e } \frac{h}{a})$ . Nota-se que a não linearidade é alta para valores moderados de  $\left(\frac{H}{L}\right)$ .  $\left(\frac{H}{L} = \frac{1}{10}\right)$ ; e apreciáveis efeitos não lineares se apresentam para valores intermediários de  $(ka)$ , quando  $\left(\frac{H}{L}\right)$  é alto. Para grandes valores de  $\left(\frac{H}{h}\right)$  a teoria não linear fornece resultados mais próximos dos experimentos.

## V.6 - RESULTADOS

Tendo em vista a possibilidade de verificações experimentais, a maior parte dos resultados obtidos neste trabalho, foram realizados em cima de um provável modelo a ser construído, cujas características para tal, após um breve estudo de análise adimensional, e das condições disponíveis no Rio de Janeiro (Laboratórios da COPPE e I.N.P.H) conduziu aos seguintes dados:

- Estrutura cilíndrica circular rígida se estendendo desde o fundo do canal, até acima da superfície livre;
- A seção de verificação do campo de pressões em torno da estrutura, será a uma profundidade de  $y = - 0,25 \text{ m}$  do NAT.
- A onda incidente é senoidal, e com uma frequência.

$$H = 10 \text{ cm} \qquad k = 0,018 \qquad \frac{H}{L} \approx 0,067$$

$$\begin{array}{lll}
 h = 150 \text{ cm} & kh \approx 2,70 & \left(\frac{H}{L}\right)\left(\frac{L}{h}\right) \approx 0,36 \\
 T = 1,50 \text{ s} & ka \approx 0,18 & \\
 L \approx 348 \text{ cm} & a = 10 \text{ cm} & \frac{H}{L} \approx 0,03
 \end{array}$$

Estes parâmetros estão dentro das hipóteses da teoria linear e águas profundas, logo

$$F_{\text{difração}} = f(ka)$$

A Figura (V-14) mostra o valor teórico da distribuição de pressões em torno do semi-perímetro da estrutura, numa profundidade de  $y = -25 \text{ cm}$ , durante a varredura da onda, isto é, (ângulo de fase entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ ).

O contorno definido pela origem das setas, indica a linha de pressão zero.

A Figura (V-15) mostra a variação das pressões com a profundidade, para duas posições da onda: na origem e em crista. Pode-se observar o decaimento exponencial das pressões, todavia estas ainda apresentam um valor significativo no fundo ( $kh > \pi$ ).

Na Figura (V-16) mostra as defasagens das pressões, para os pontos A, C e E da Figura (V-15) durante a passagem da onda.

Por sua vez, a Figura (V-17) mostra para algumas posições da onda, a distribuição das pressões em torno da estrutura.

Na tentativa de se estabelecer comparações com resultados experimentais, foi rodado via computador<sup>(4)</sup> um exemplo

---

(4) Foi desenvolvido um programa que calcula o campo tridimensional de pressões em torno do corpo.

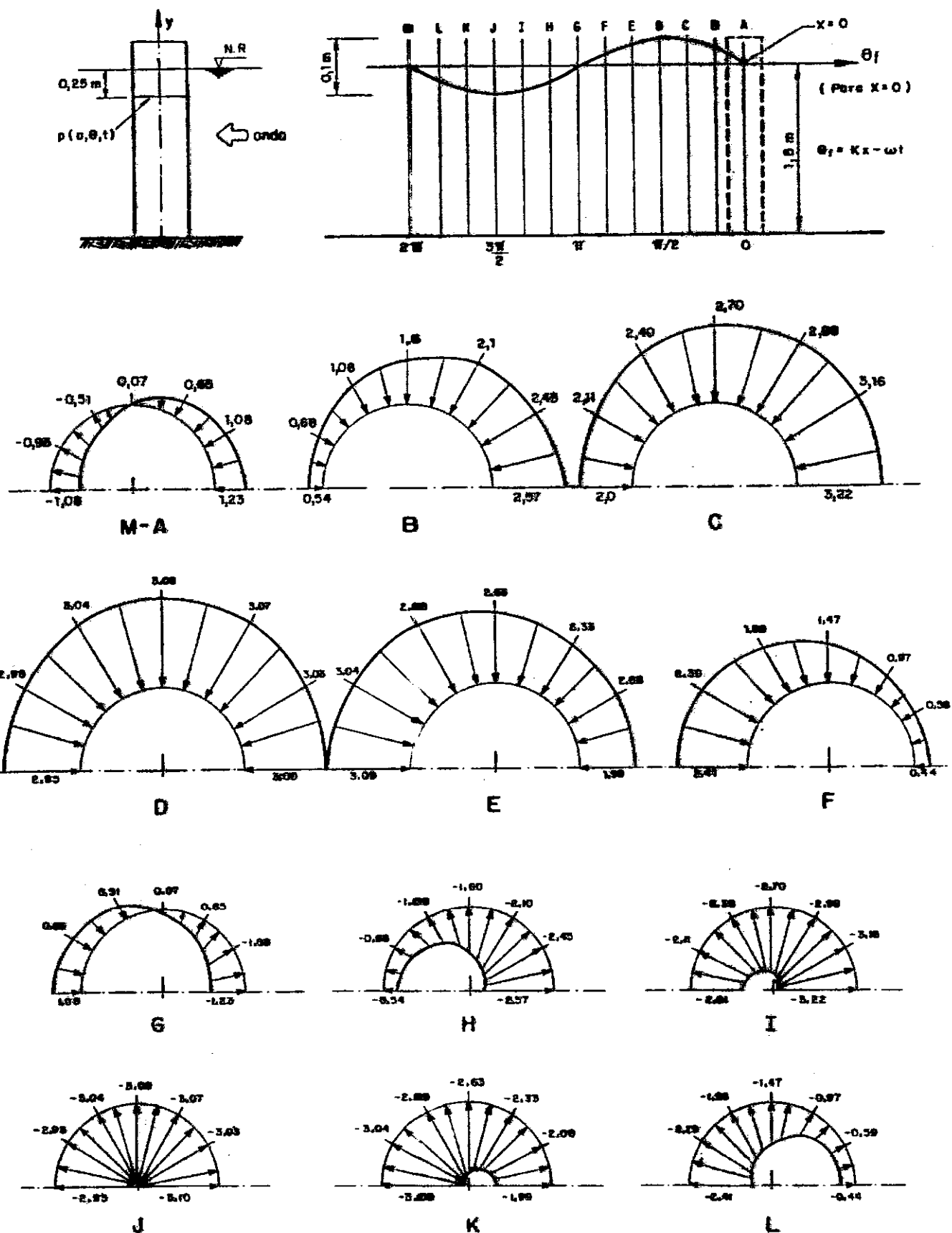


FIG. V14 - Pressões em  $\text{gf/cm}^2$  ao redor da metade de um corpo cilíndrico, para intervalos de  $30^\circ$  do período da onda (o contorno definido pela extremidade da seta, mostra a linha de pressão zero).



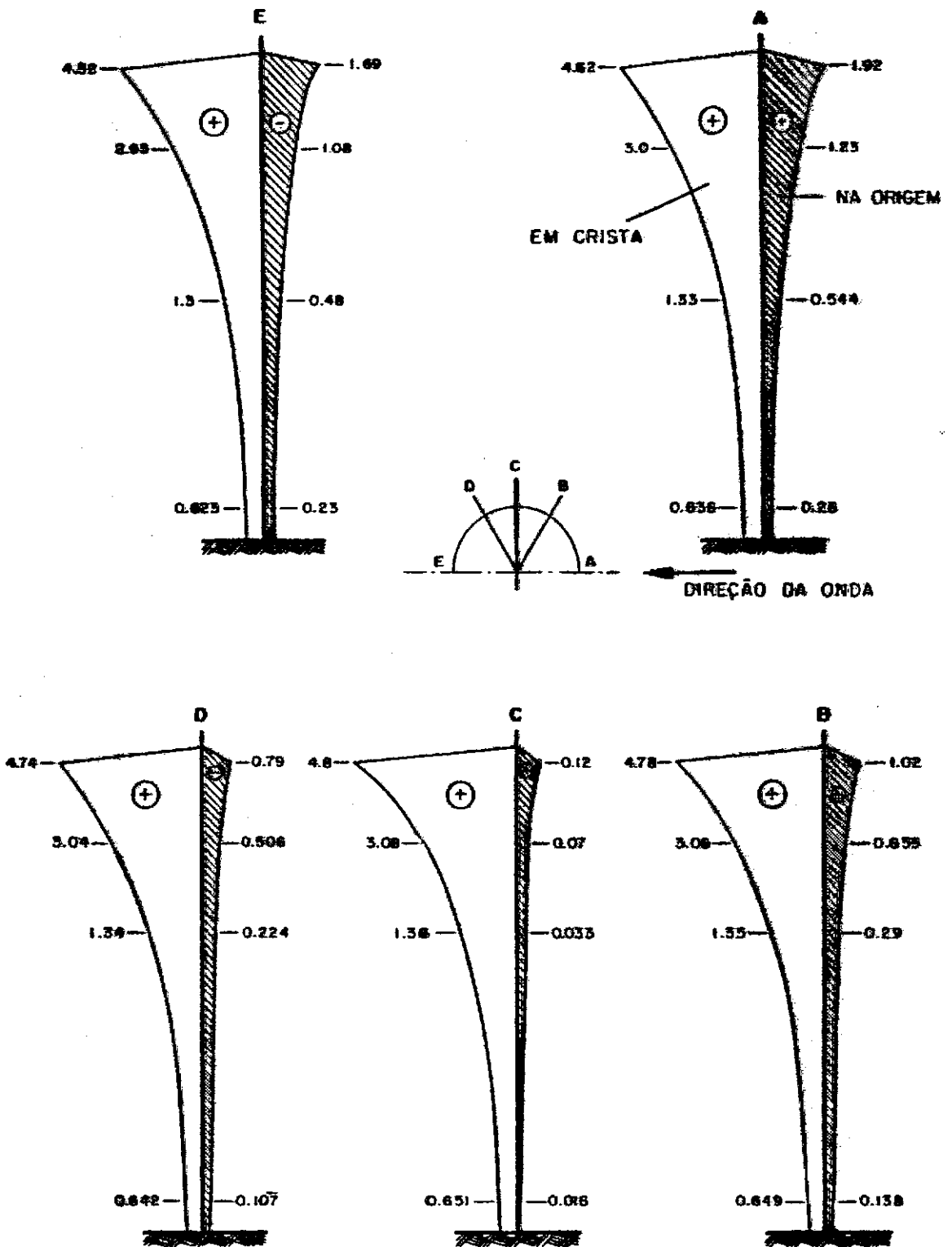


FIG.V.15-Distribuições das Pressões com a Profundidade ( $\text{gf}/\text{cm}^2$ ) para Posições da Onda na Origem ( $wt=0$ ) e em Crista ( $wt=\frac{\pi}{2}$ ), conforme a Fig. anterior.

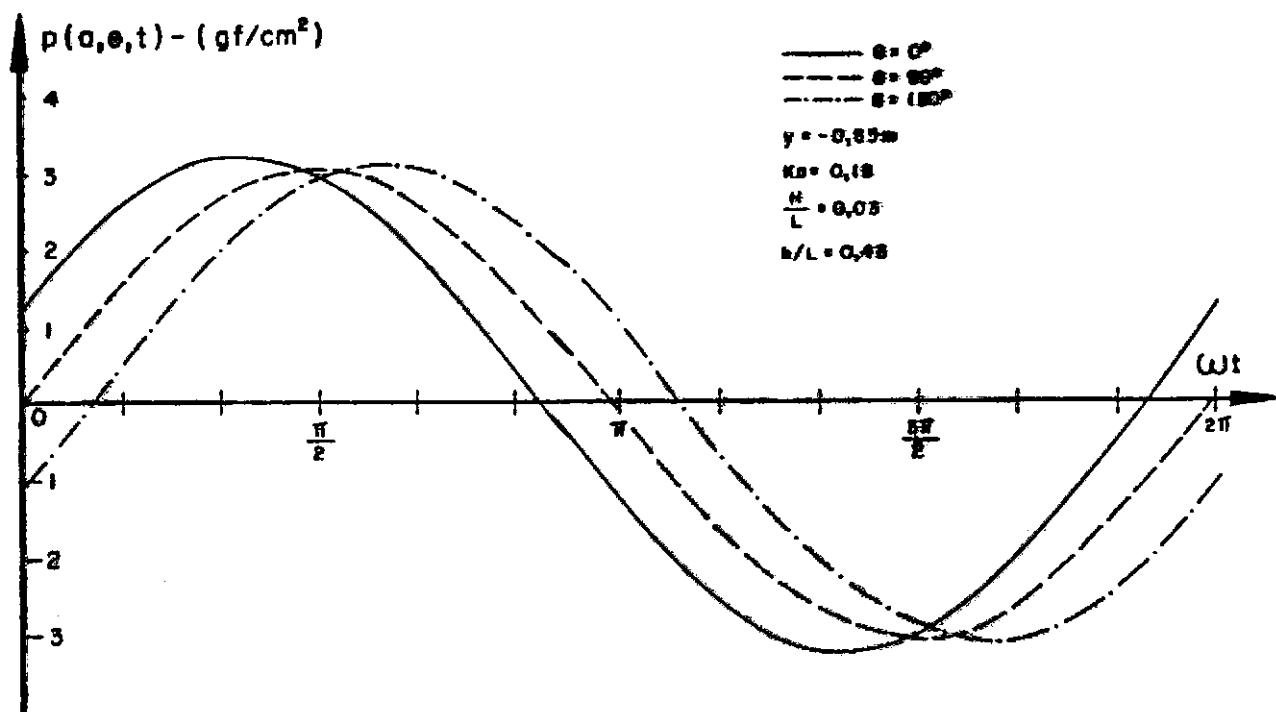


FIG.V.16- Defasagens da Pressão, para Pontos do Corpo durante um período da Onda.

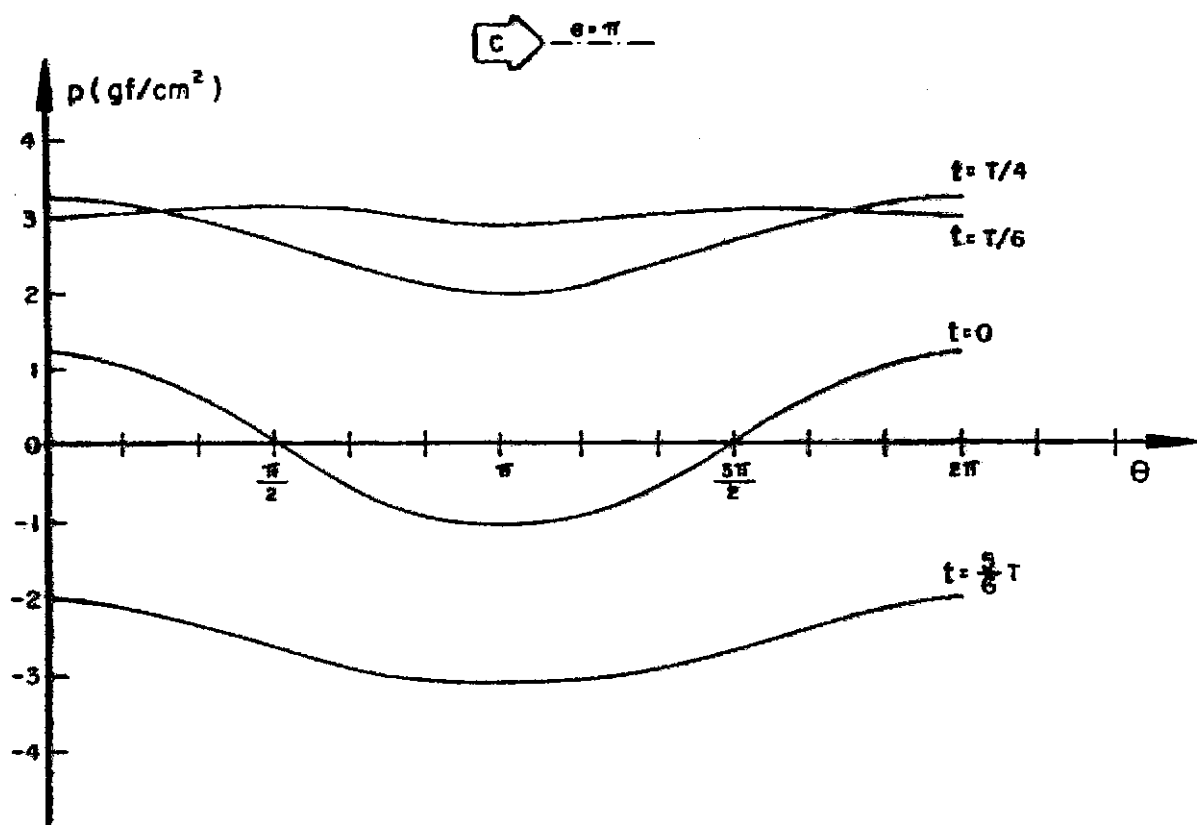


FIG.V.17- Pressões em  $gf/cm^2$  ao redor da parede do corpo Para varios Intervalos do Período da Onda, com  $T = 1,50$  S.

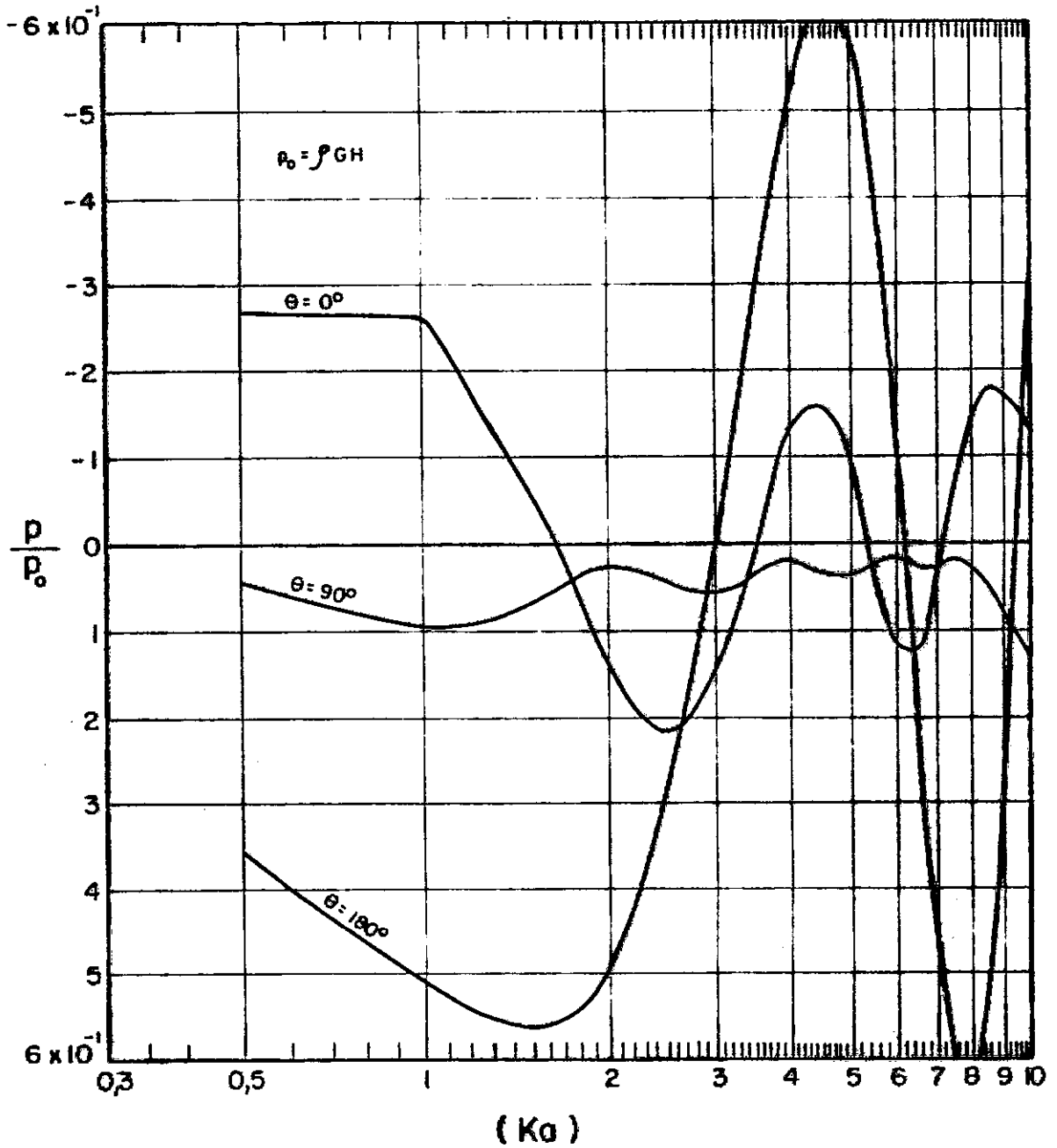


FIG.V.17a - Distribuição das Pressões na Superfície de um Cilindro Circular Rígido, para Pontos em diversos Ângulos  $\theta$  a uma Profundidade  $(\frac{h}{6})$ .



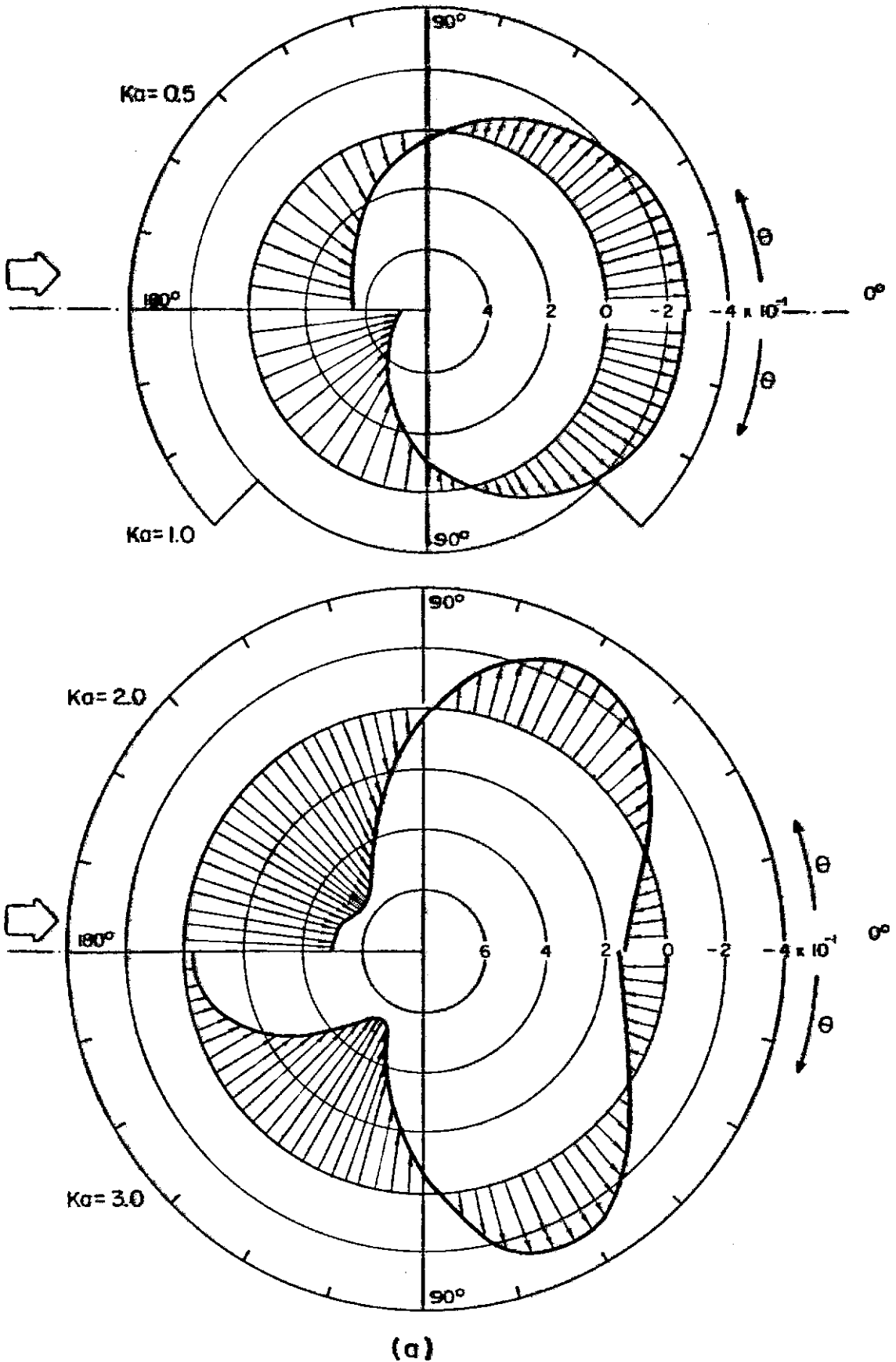
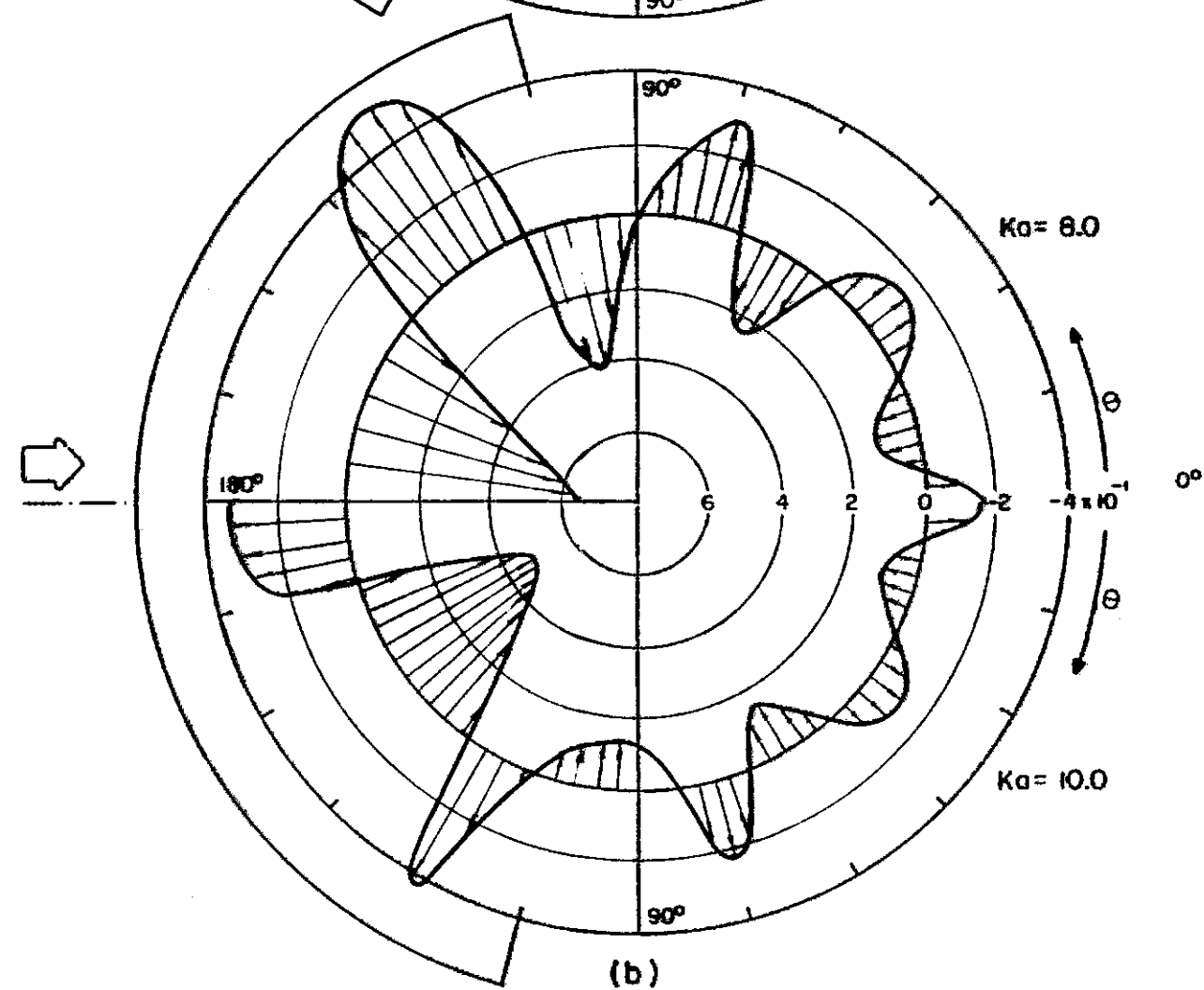
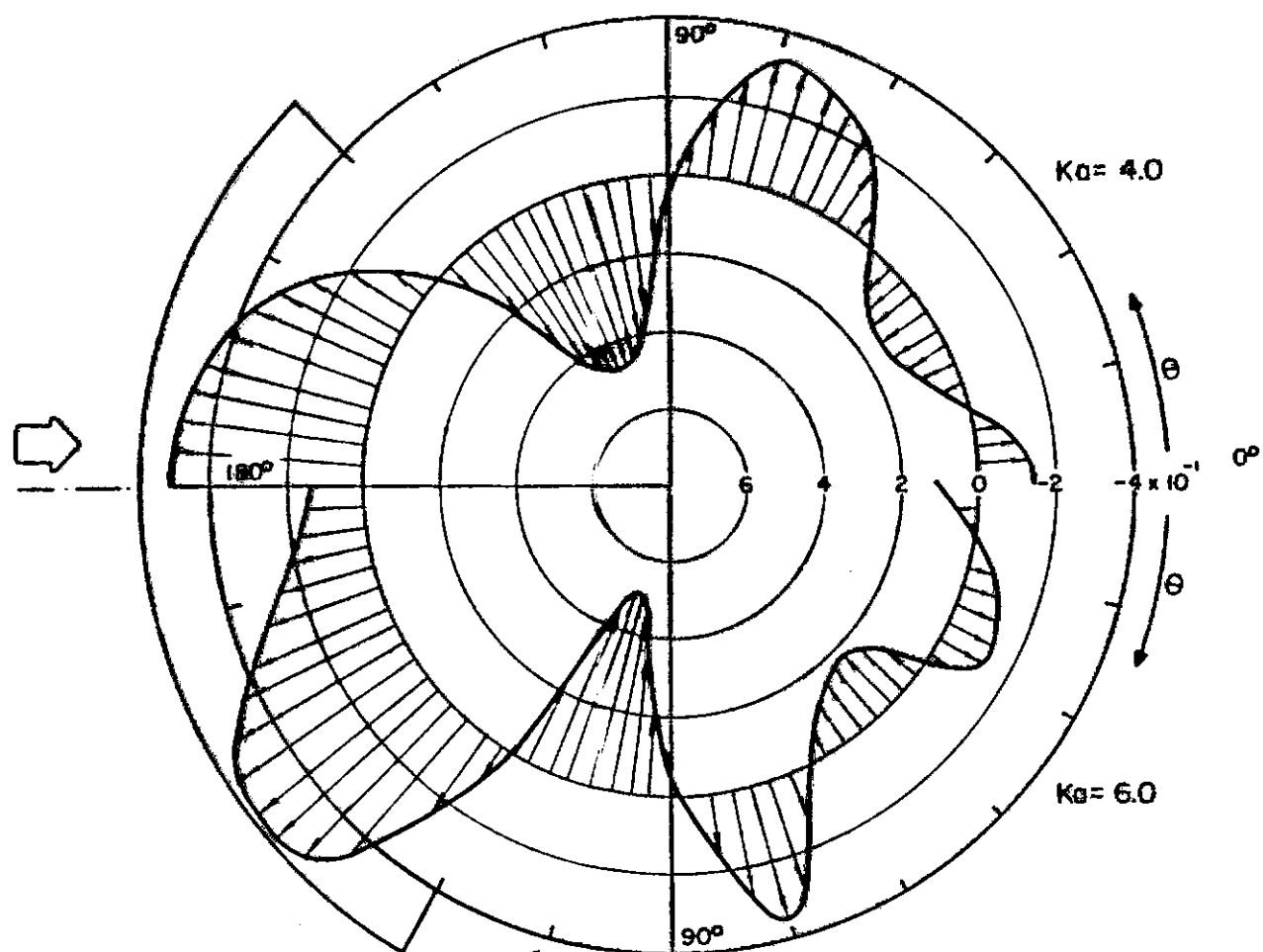


FIG.V.19-O diagrama polar mostra a distribuição das pressões ( $p/p_0$ ) sobre um cilindro circular de raio  $a$  devido ao efeito de espalhamento da onda.



plo apresentado na referência  $|^{23}|$ , cujos valores teóricos reproduziram com uma razoável precisão, os valores teóricos ali apresentados, e contrastados aos experimentais. A Fig. (V-18) mostra estes valores, para as posições da onda em crista e ventre.

O diagrama polar da Figura (V-19) apropriadamente mostra a distribuição das pressões  $(p/\rho g H)$  em torno da semi-periferia da estrutura, em função do parâmetro de espalhamento  $(ka)$ . A curva formada pela origem das setas, caracteriza a linha de pressão zero.

A respeito da distribuição das elevações relativas da superfície livre, em torno da estrutura, devido ao efeito de espalhamento; os resultados teóricos obtidos, reproduziram com boa aproximação, os valores teóricos e experimentais apresentados na referência  $|^{171}|$ . (Vide Figura V-20), referidos ao modelo na escala de 1/100, que representa uma ilha artificial cilíndrica (tanque de estocagem), com 96 m de diâmetro, numa lâmina d'água de 50 m, se estendendo até a superfície.

Procurando-se estabelecer uma relação entre as forças, e as frequências da onda incidente, para aumentar significativos da ordem de grandeza das dimensões da estrutura; a Figura (V-21) mostra valores das forças adimensionais, em função da frequência (e período) da onda incidente, para vários raios de estruturas.

Os gráficos apresentados neste Capítulo foram obtidos de resultados via computador, e procuram explorar ao máximo as informações, que podem ser inquiridas do parâmetro de espalhamento  $(ka)$ . As gravuras são suficientemente claras, a ponto de fornecerem de imediato as conclusões, após uma simples análise dos resultados que são mostrados.

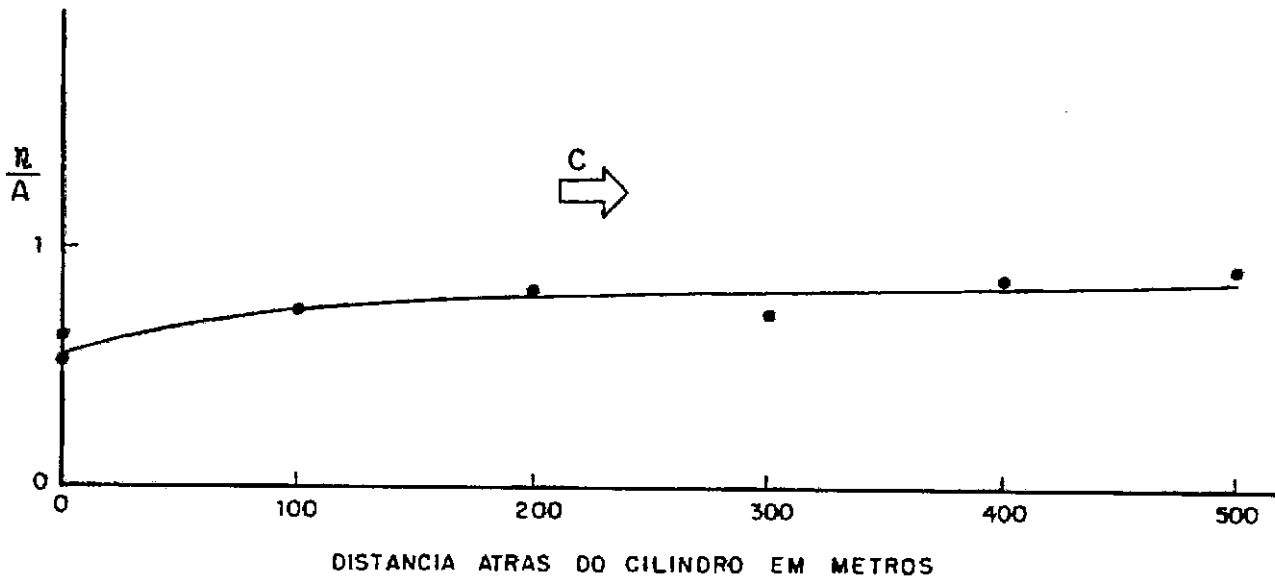
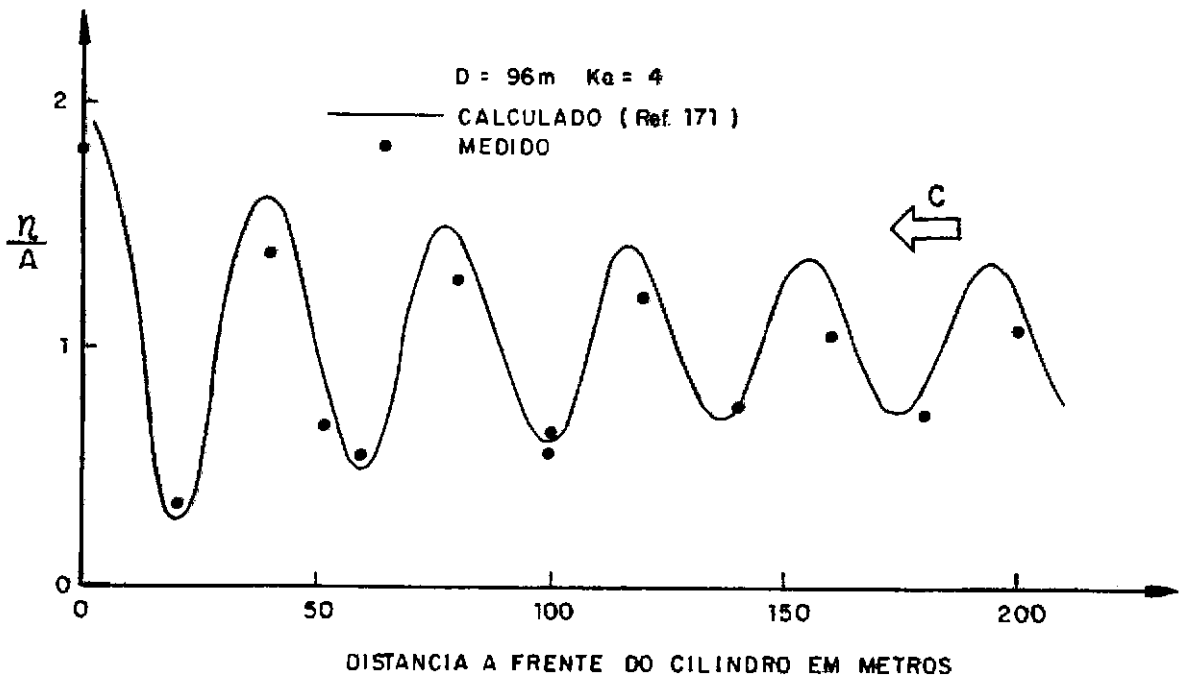


FIG. V.20 — Elevação relativa da superfície livre a frente e atrás do corpo.



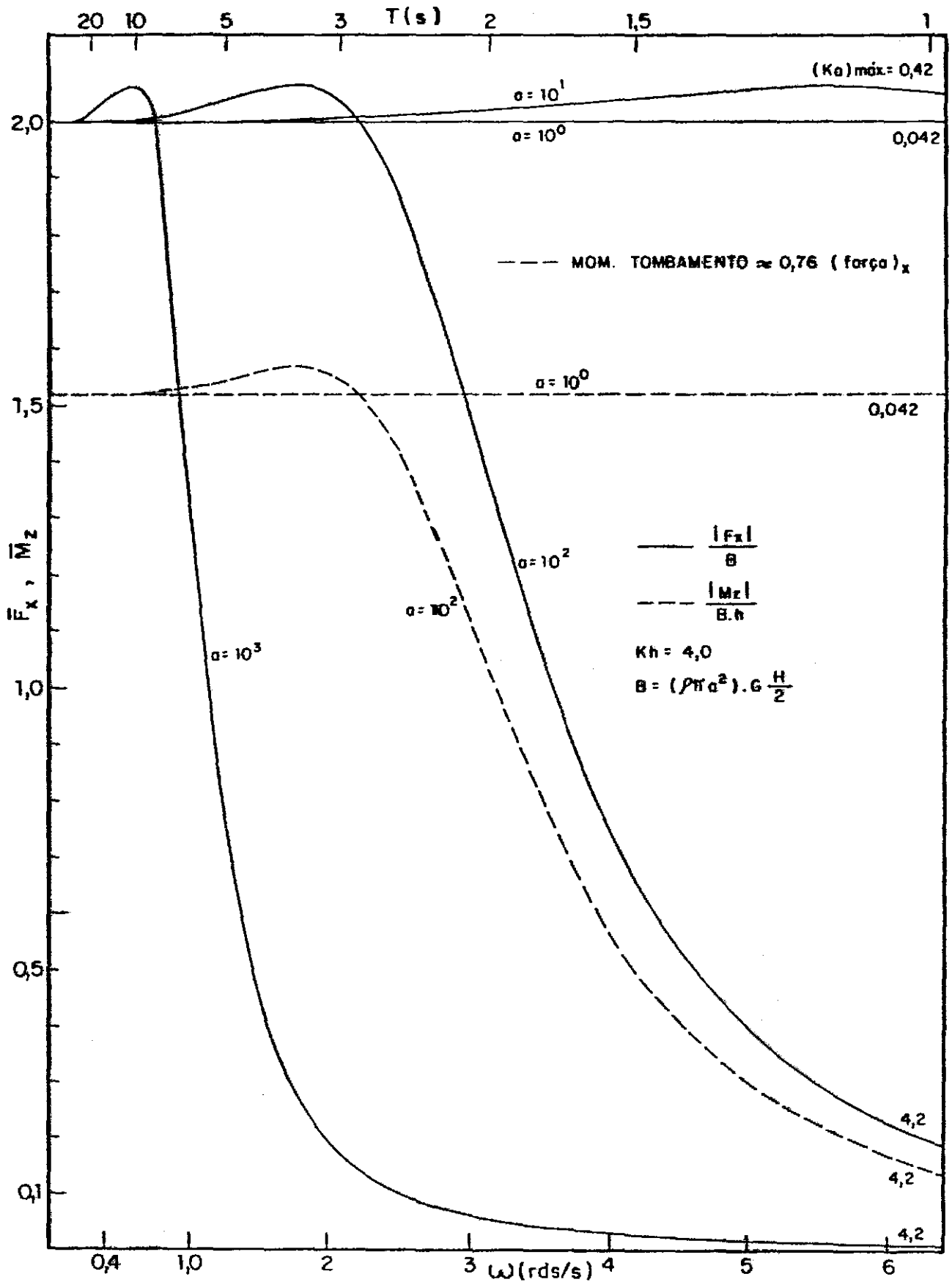


FIG.V.21- Forças e momentos versus frequência da onda, para diversos raios da estrutura.

## CAPÍTULO VI

### ESTUDO COMPARATIVO DO CAMPO DE APLICABILIDADE E DA IMPORTÂNCIA RELATIVA DOS FATORES INTERVENIENTES NO CÔMPUTO DAS SOLICITAÇÕES DE ONDAS

#### VI.1 - INTRODUÇÃO

Existem basicamente duas aproximações diferentes usadas hoje em dia para a computação da interação fluido-estrutura associadas as estruturas fixas ou flutuantes no mar: (a) aplicação da fórmula de Morison e (b) a teoria da difração (teoria do fluxo potencial). Todavia existe muitas vezes uma confusão generalizada, quanto ao uso destes dois procedimentos, e seus limites de aplicabilidade. Por isso, torna-se conveniente uma discussão mais elaborada<sup>(1)</sup> sobre a formulação de Morison e a teoria da difração não viscosa (os efeitos de viscosidade são desprezíveis para  $ka \gg 1$ , o que justifica o uso da teoria).

Reconhece-se que a teoria da difração, como foi concebida se refere a fluidos não viscosos, incompressíveis e irrotacionais (fluxo potencial), mas que atende com grande êxito o problema da interação fluido-estrutura, se respeitadas suas premissas originais. Nesta teoria, a solução da interação é obtida através de simplificações, como a linearização das condições de contorno na superfície livre; e com o auxílio das condições de contorno cinemáticas na superfície do corpo e no fundo do mar. Além disso, as ondas causadas pela presença do corpo e/ou seu movimento satisfazem a condição de radiação a uma grande distância deste, ao mesmo tempo, que as forças são fornecidas em função de um coeficiente efetivo de inércia, que se atualiza permanentemente em função dos valores de  $(ka)$ , tentando com isso, reproduzir mais realisticamente o que ocorre.

---

(<sup>1</sup>) A literatura não tem discutido a contento o problema.

Por outro lado, na formulação de Morison, ainda que tentanto levar em conta os efeitos da viscosidade, parece muitas vezes não suficiente para reproduzir as condições manifestadas, como os efeitos de esteira, movimentos da estrutura e etc., e se depara com um grande problema, que são a determinação dos coeficientes empíricos, cuja dependência se estende a um número muito grande de variáveis, quase sempre impossíveis de serem tratados ao mesmo tempo.

Diante destas dificuldades, mais difícil ainda se torna a escolha das condições corretas para as situações certas.

Por isso, o presente Capítulo tem como objetivo discutir, analisar e mostrar mais claramente, a importância relativa dos fatores intervenientes nas parcelas que contribuem no cômputo das forças; ponderar suas zonas de validade, estabelecer faixas precisas de aplicabilidade e propor limites mais perceptíveis e concretos, disponíveis ao uso imediato; bem como, sugerir certas orientações úteis.

## VI.2 - CURVA LIMÍTROFE DOS EFEITOS INERCIAIS E/OU VISCOSOS

Como foi visto no Capítulo IV, a maneira tradicional de se calcular as forças sobre estruturas esbeltas, tem sido dada por:  $F_T = F_I + F_A$ , com cada uma destas componentes variável no tempo; e sua formulação apresentada em termos de (i) propriedades geométricas da estrutura (ii) propriedades que descrevem o campo fluídico e (iii) "constantes variáveis" determinados empiricamente.

Em virtude disto, decorre naturalmente a idéia de se precisar o grau de contribuição de cada uma destas componentes.

Existem dois parâmetros de interação onda-estru

tura, que fornecem boas informações a respeito da influência dos efeitos inerciais e viscosos: parâmetro de espalhamento ( $ka$ ) e o parâmetro de esteira ( $H/D$ ); tentar-se-á portanto, buscar uma relação entre ambos.

Trabalhando-se convenientemente com eles, chega-se:

$$\frac{H}{D} = \pi \left( \frac{H}{L} \right) \frac{1}{ka} \quad (VI.1)$$

como  $\frac{H}{L} = \frac{1}{7}$  (limite máximo da inclinação da onda para a teoria linear em águas profundas), tem-se:

$$\frac{H}{D} = \frac{\pi}{7} \frac{1}{(ka)} \quad (VI.2)$$

Da Eq. (VI.2) se conclui que os efeitos viscosos são inversamente proporcionais aos efeitos inerciais; isto é, para valores significativos de ambos os dois efeitos nunca acontecem ao mesmo tempo. Tal como foi apresentado na Seção III-9, as informações prestadas por estes dois parâmetros, servem como indicadores e limitadores, da predominância destes efeitos; fato que ficará bem caracterizado mais adiante. A curva da Figura VI-1) mostra a relação entre ( $H/D$ ) e ( $ka$ ), como esta curva representa a linha de máxima inclinação da onda (para águas profundas), todos os casos apresentados estão localizados na região abaixo desta curva. Curvas de interpretação análoga têm sido apresentadas [139], e se se quizesse representar  $H/D$  versus ( $L/D$ ) ter-se-ia uma reta com coeficiente angular igual a ( $1/7$ ).

#### VI.2-1 - Variação das Forças com a Profundidade

Seja uma onda incidente senoidal em águas profundas e  $C_M$ ,  $C_D$  constantes com a profundidade (suposição não muito realista). Pode-se facilmente mostrar, que a componente de

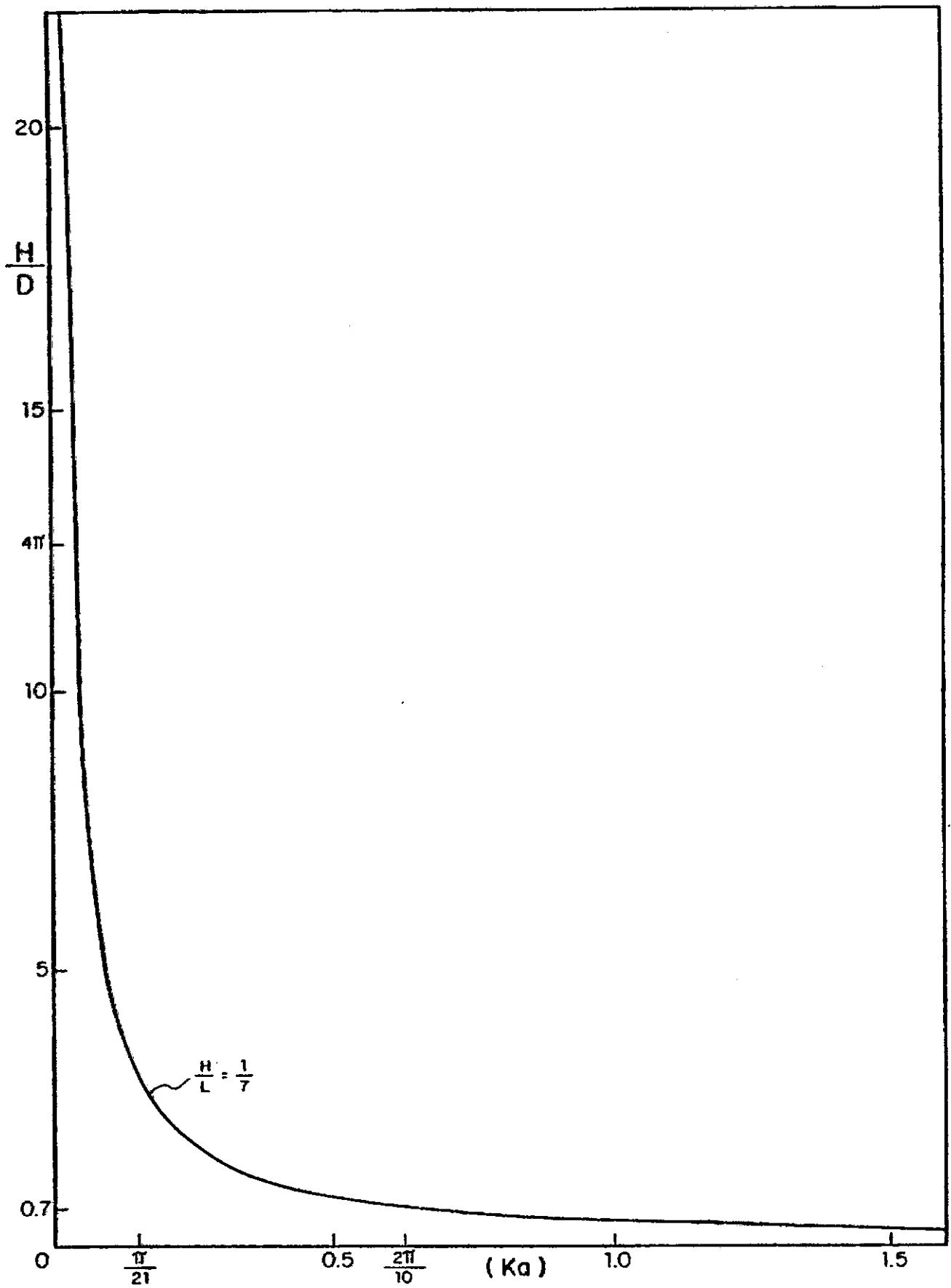


FIG. VI. 1 - Parâmetro de esteira ( $\frac{H}{D}$ ) versus parâmetro de espalhamento ( $Ka$ ).

inércia decai com a profundidade segundo o fator  $(e^{ky})$ , pois  $f_I = (f_{I,0})_m e^{ky}$ ; enquanto que o arraste, com  $(e^{2ky})$ , onde  $f_A = (f_{A,0})_m \times e^{2ky}$ . Vê-se com isso, que o arraste está mais concentrado na superfície, e tem seu máximo valor para uma faixa, submersa, quando a crista da onda está sobre o eixo da estrutura. Para a força de inércia, tem-se um máximo absoluto, quando um nodo da onda está sobre o mesmo eixo.

### VI.3 - PESQUISA DAS CONDIÇÕES DA FORÇA DE PICO

A força total sobre a estrutura é a soma das componentes de inércia e arraste:

$$F_T = F_I + F_A = \rho A_s \dot{u} + C_I \rho A_s \dot{u} + \frac{1}{2} C_D D \rho u |u| \quad (VI.3)$$

e a força total por unidade de comprimento para o cilindro estacionário fica:

$$F_T = \rho C_M A_s \dot{u} + \frac{1}{2} \rho C_D D u |u| \quad (VI.4)$$

onde:

$$C_M = 1 + C_I$$

$$A_s = \pi a^2 = \text{área da seção transversal}$$

Seja novamente a consideração de uma onda incidente senoidal de frequência circular  $\omega$  (fluxo oscilante no tempo), com a amplitude não perturbada ( $A$ ), se desenvolvendo em águas profundas:

Da Equação simplificada (III.2-69) tem-se:

$$u = -A\omega e^{ky} \sin(kx - \omega t)$$

Supondo-se o eixo da estrutura na origem do sistema de referência ( $x = 0$ ), vem:

$$u = A \omega e^{ky} \sin \omega t = u_m \sin (\omega t) \quad (\text{VI.5})$$

e a Eq. (VI.4) se transforma em:

$$f_T = \rho A_s C_M U_m \omega \cos (\omega t) + \frac{1}{2} C_D \rho D U_m^2 \sin (\omega t) |\sin (\omega t)| \quad (\text{VI.6})$$

por diferenciação em relação ao tempo da Eq. (VI.6) encontra-se o máximo ou o mínimo da força, isto é:

$$\frac{\partial f_T}{\partial t} = 0 \quad \therefore \quad -A_s C_M \omega + C_D D u_m \cos (\omega t) = 0 \quad (\text{VI.7})$$

E pode-se facilmente mostrar que o máximo valor da força por unidade de comprimento em cada ciclo da onda será igual ao maior dos dois valores:

$$f_{T_{\max}} = \begin{cases} \rho A_s C_M u_m \omega & \text{se } \frac{U_m}{\omega D} < \frac{C_M A_s}{C_D D^2} \\ \text{ou} & \\ \frac{1}{2} \rho u_m^2 D C_D + \frac{(\rho A_s C_M u_m \omega)^2}{2 \rho u_m^2 D C_D} & \text{se } \frac{U_m}{\omega D} > \frac{C_M A_s}{C_D D^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (\text{VI.8}) \\ (a) \\ (\text{VI.9}) \\ (b) \end{matrix}$$

O caso (a) diz que a amplitude da componente de arraste é menor que a da de inércia. Isto é: trabalhando-se com a condição (VI.8-a) vem:

$$A e^{ky} < \frac{\pi}{4} \left( \frac{C_M}{C_D} \right) \cdot D \quad (\text{VI.10})$$

Sabe-se que o raio da trajetória das partículas em águas profundas (Eq. III.2-73) é:

$$\xi = A e^{ky} ,$$

então a Eq. (VI.10) diz que a amplitude do movimento horizontal das partículas d'água (para o fluxo não perturbado) é menor que

$$\left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{C_M}{C_D} \right) \right] \text{ vezes o raio da estrutura. Para este caso } \omega t = 0$$

e a máxima força será:

$$f_T = (\rho \pi a^2) C_M \omega^2 A e^{ky} dy \quad (\text{VI.11})$$

pelo exame do perfil da onda não perturbado,  $\eta = -A \sin(kx - \omega t) = -A \sin \theta_f$ , encontra-se que a força máxima ocorre quando em  $\theta_f$  tem-se um nodo, e a inclinação da onda é negativa para o eixo da estrutura.

$$\text{Agora, se } A e^{ky} > \frac{\pi}{2} \left( \frac{C_M}{C_D} \right) a \quad (\text{VI.12})$$

a força tem um ponto estacionário de inflexão para  $\omega t = 0$  e o máximo ocorre para

$$\cos \omega t = \frac{\pi}{4} \left( \frac{C_M}{C_D} \right) \frac{D}{A e^{ky}} \quad (\text{VI.13})$$

e a amplitude da força será:

$$\frac{1}{2} \rho D C_D u_m^2 + \frac{(\rho A_s C_M u_m \omega)^2}{2 \rho u_m^2 D C_D} \quad (\text{VI.14})$$

Se a estrutura é estacionária e contínua de  $y = 0$  até  $y = -h$

$$F_T = \int_{-h}^0 f_I dy + \int_{-h}^0 f_A dy \quad (\text{VI.15})$$

#### VI.4 - PREDOMINÂNCIA DAS FORÇAS DE INÉRCIA E/OU ARRASTE

Muitas vezes torna-se necessário estimar a impor



tância relativa da contribuição das componentes de inércia e arraste, no cômputo geral do cálculo das forças pela Equação de Morison; isto é, em que condições uma predomina sobre a outra, ou ambas possuem a mesma representabilidade.

Para tal, estabelece-se uma relação entre as Equações (IV.72) e (IV.71), para seus máximos individuais, onde:

$$F_I = C_M (\rho \pi a^2) g \frac{H}{2} \operatorname{tg} h(kh),$$

e

$$F_A = C_D (\rho a) \frac{H^2}{8} \left( 1 + \frac{2kh}{\operatorname{sen} h(2kh)} \right)$$

Chamar-se-á de  $R_I$  a relação:

$$R_I = \frac{(F_A)_{\max}}{(F_I)_{\max}} = \left( \frac{C_D}{C_M} \right) \left( \frac{H}{4\pi a} \right) \frac{\operatorname{sen} h(2kh) + 2kh}{\operatorname{sen} h(2kh) \cdot \operatorname{tg} h(kh)} =$$

$$\therefore \left( \frac{C_D}{C_M} \right) \left( \frac{H}{D} \right) \frac{\operatorname{sen} h(2kh) + 2kh}{4\pi \operatorname{sen} h^2(kh)} \quad (\text{VI.16})$$

onde:

$$\frac{H}{D} = 4\pi \left( \frac{C_M}{C_D} \right) \frac{\operatorname{sen} h^2(kh)}{\operatorname{sen} h(2kh) + 2kh} \cdot R_I \quad (\text{VI.17})$$

Tentando-se simplificar a Eq. (VI.17), escolhe-se valores de muita ocorrência para  $C_M$  e  $C_D$ , ou seja:  $C_M = 2,0$  e  $C_D = 1$ , logo:

$$\frac{H}{D} = 8\pi (R_I) \frac{\operatorname{sen} h^2(kh)}{\operatorname{sen} h(2kh) + 2kh} \quad (\text{VI.18})$$

Procurar-se-á agora, examinar a condição importante de limitação entre a influência do arraste e da inércia.

Para o caso, imagina-se a condição em que o máximo da força de arraste e inércia é exatamente igual a um, ou seja:  $R_I = 1$

Então:

$$\frac{H}{D} = 8 \pi \frac{\operatorname{sen} h^2 (kh)}{\operatorname{sen} h (2 kh) + 2 kh} \quad (\text{VI.19})$$

A relação (VI.19) é plotada na Figura (VI-2), e mostra a relação  $(H/D)$  em função de  $(kh)$ . Indicando quando a força de arraste, ou de inércia se tornam predominantes. Para valores da relação  $(R_I)$  maiores que um, ter-se-iam curvas se inserindo na região achuriada do gráfico; e para  $(R_I)$  menores que um, curvas abaixo da linha desenhada; indicando zonas do domínio das forças de inércia.

Por outro lado, esta figura fornece uma interpretação valiosa, no que tange a escolha de regiões precisas, onde os efeitos de inércia ou arraste se tornarão predominantes; e com isso, aumenta-se a confiabilidade dos resultados experimentais definidos em zonas bem caracterizadas deste diagrama.

Por outro lado, quando  $kh \rightarrow \infty$ , a curva apresentada tende para uma assíntota equivalente a  $H/D = 4 \pi$ .

#### VI.4-1 - Um Outro Resultado Importante

É possível se demonstrar para águas profundas, que os efeitos de esteira, estão associados a predominância das forças de arraste.

Sejam as expressões das forças de arraste e inércia, por unidade de comprimento da estrutura; em águas profundas

$$(f_A)_{\max} = \rho a C_D \left( \frac{H\pi}{T} \right)^2 e^{2ky} \quad (\text{VI.20})$$

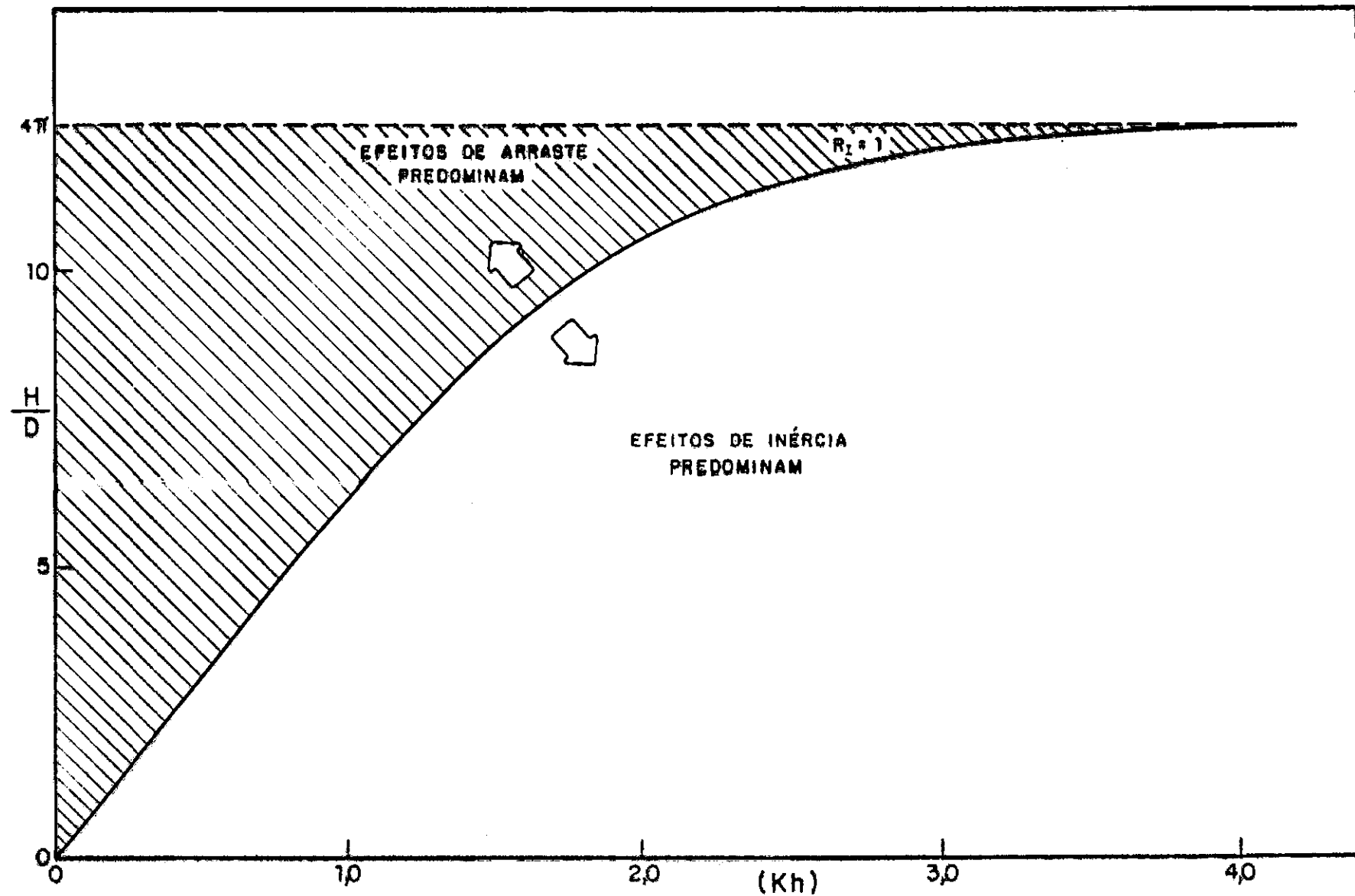


FIG. VI.2 -  $(\frac{H}{D})$  versus  $(Kh)$  para relação  $R_I = \text{arraste} / \text{inércia} = 1$  com  $\frac{H}{L} = \frac{1}{7}$ .

$$(f_I)_{\max} = (\rho \pi a^2) C_M \frac{Hg\pi}{L} e^{ky} \quad (\text{VI.21})$$

e seja

$$R_I = \frac{\text{força máxima arraste}}{\text{força máxima inércia}} = \frac{(f_A)_{\max}}{(f_I)_{\max}}$$

Então:

$$R_I = \left( \frac{C_D}{C_M} \right) \left( \frac{1}{\pi a} \right) \frac{H^2 \pi^2 L}{T^2 H g \pi} e^{ky} \quad (\text{VI.22})$$

como

$$\omega^2 = k g$$

resulta:

$$R_I = \left( \frac{C_D}{C_M} \right) \frac{H}{\pi D} e^{ky} \quad (\text{VI.23})$$

ou

$$R_I = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{C_D}{C_M} \right) \left( \pi \frac{H}{D} e^{ky} \right) \quad (\text{VI.23a})$$

Por outro lado sabe-se que:

$$N_{kc} = \frac{U_{\max} \cdot T}{D} = A \omega e^{ky} \frac{T}{D} = \pi \frac{H}{D} \quad (\text{VI.24})$$

Comparando-se as Eqs. (VI.24) com (VI.23), tem-se:

$$R_I = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{C_D}{C_M} \right) N_{kc} \quad (\text{VI.25})$$

onde

$$N_{kc} = (R_I) \pi^2 \left( \frac{C_D}{C_M} \right) \quad (\text{VI.26})$$

para

$$C_M = 2, \quad C_D = 1 \quad \text{e} \quad R_I = 1$$

$$N_{kc} = 2\pi^2 \quad (\text{VI.27})$$

Da Equação (VI.27), com apoio da Figura (VI-2), infere-se:

Para  $N_{kc} < 2\pi^2 \approx 20$ , os efeitos de inércia serão predominantes, todavia, para  $N_{kc} > 2\pi^2$  os efeitos viscosos serão preponderantes. Estes limites obtidos de uma constatação analítica, ainda que com a utilização de algumas simplificações, representam um importante resultado, que vem ao encontro da ordem de grandeza obtida por Keulegan-Carpenter para as manifestações significativas dos efeitos de esteira.

#### VI.4-2 - Relação (ka) versus (kh)

No jogo de se buscar relações, que melhor caracterizem a participação e influência das forças de inércia, e arraste; torna-se possível, relacionar o fator de espalhamento (ka) com a profundidade relativa (kh).

Trabalhando-se a Eq. (VI-18) chega-se:

$$\frac{1}{(ka)} = \left(\frac{L}{H}\right) \cdot 8 R_I \frac{\text{sen}^2 h(kh)}{\text{sen} h(2kh) + (2kh)} \quad (\text{VI.28})$$

que resulta:

$$(ka) = \left(\frac{H}{L}\right) \frac{1}{8 R_I} \frac{\text{sen} h(2kh) + (2kh)}{\text{sen}^2 h(kh)} \quad (\text{VI.28a})$$

para

$$\frac{H}{L} = \frac{1}{7} \quad \text{e} \quad R_I = 1$$

A Figura (VI-3), para máxima inclinação da onda, e a relação força de arraste versus força de inércia igual a um ( $R_I = 1$ ), mostra a relação entre  $(ka)$  e  $(kh)$ . Observa-se que para corpos delgados e localizados em águas baixas a força de arraste tende a predominar; em contrapartida, para os corpos de grandes dimensões, localizados em águas profundas a força de inércia tende a ser preponderante. Para valores de  $R_I < 1$  o arraste predomina, e todos os casos caem em baixo da curva da Figura. Para  $R_I > 1$ , a inércia predomina, e todos os casos situam-se acima da curva dada.

#### VI.5 - MORISON VERSUS DIFRAÇÃO

Supondo-se o desconhecimento de algumas prescrições apresentadas na literatura, no que se refere aos limites das regiões tipicamente caracterizadas pela predominância dos efeitos viscosos, inerciais e de difração; é possível, tal como já foi feito para as forças de inércia e arraste, buscar uma relação que traduza a importância relativa da difração, em relação as anteriores. Ainda que não definam limites precisos, estas relações são de capital importância no controlo global do problema; pois, poderão sugerir simplificações substanciais, uma vez que, o conhecimento pleno do domínio onde o fenômeno acontece, fornece a segurança e confiabilidade nas aproximações, que adequadamente poderão ser utilizadas.

##### VI.5-1 - Relação de Forças

Sejam as expressões das forças totais de Froude-Krilov ( $F_k$ ), inércia ( $F_I$ ), arraste ( $F_A$ ), e difração ( $F_D$ ) já obtidos anteriormente.

$$F_k = (\rho \pi a^2) \frac{H}{2} \operatorname{tgh}(kh) \cos \theta_f \quad (\text{VI.29})$$

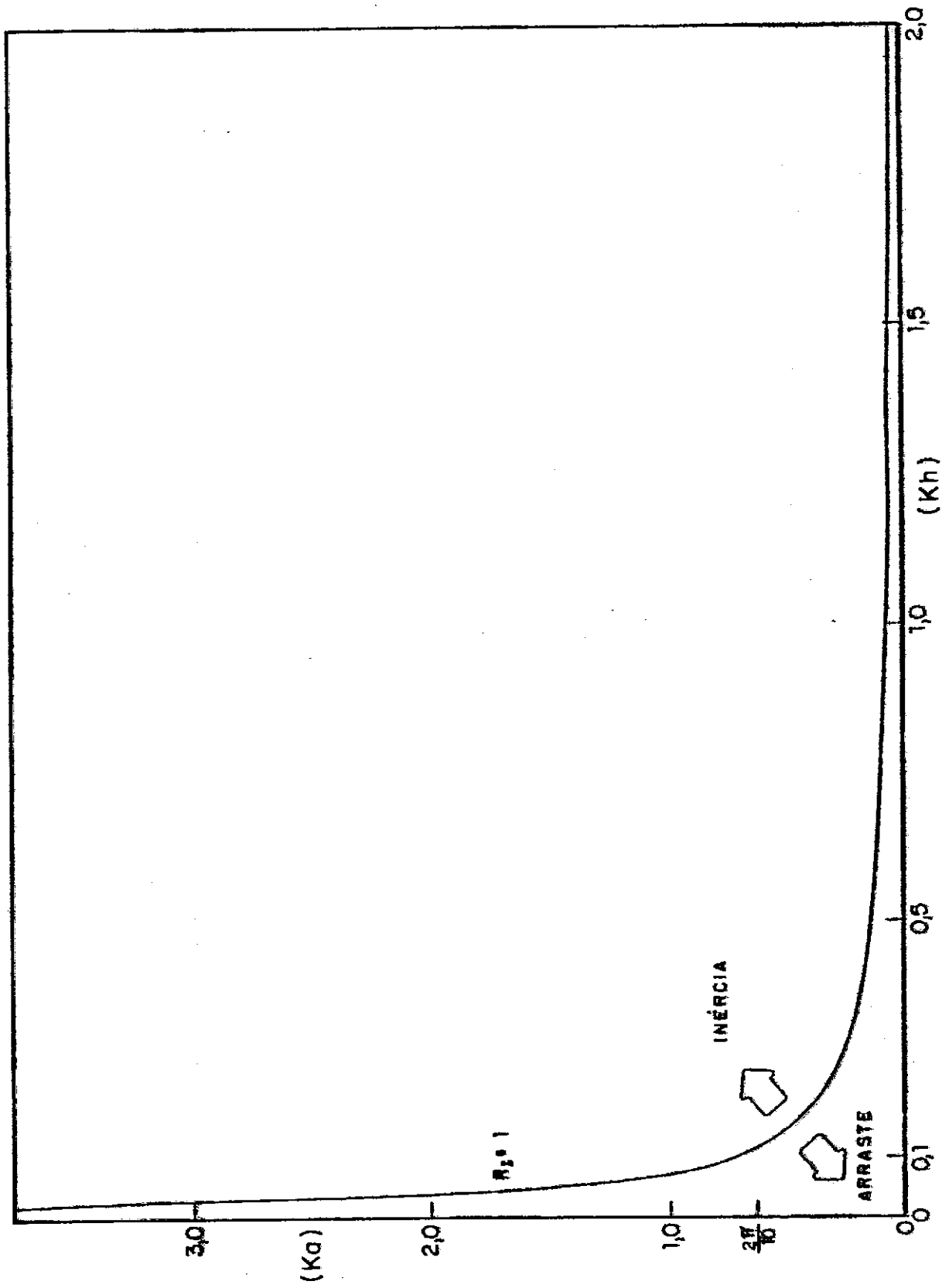


FIG. VI.3 -  $(K_a)$  versus  $(K_h)$  para relação  $R_i = 1$  com a linha de máxima inclinação da onda.

$$F_I = C_M (\rho \pi a^2) g \frac{H}{2} \operatorname{tg} h(kh) \cos \theta_f \quad (\text{VI.30})$$

$$F_A = C_D (\rho a) g \frac{H^2}{8} \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \sin \theta_f \quad (\text{VI.31})$$

$$F_D = C_M^* (\rho \pi a^2) g \frac{H}{2} \operatorname{tg} h(kh) \cos(\omega t - \delta) \quad (\text{VI.32})$$

onde

$C_M^*$  = coeficiente efetivo de inércia obtido pela teoria da difração

Para o máximo individual de cada uma destas forças; trabalhando-se com as Eqs. (VI.29) a (VI.32) poder-se-á expressar cada uma delas, em função do parâmetro de espalhamento ( $ka$ ), ou seja:

$$F_k = \left( \rho g \frac{H}{2} L \right) \left( \frac{L}{4\pi} \right) (ka)^2 \operatorname{tg} h(kh) \quad (\text{VI.33})$$

$$F_I = C_M \left( \rho g \frac{H}{2} L \right) \left( \frac{L}{4\pi} \right) (ka)^2 \operatorname{tg} h(kh) \quad (\text{VI.34})$$

$$F_A = C_D \left( \rho g \frac{H}{2} L \right) \left( \frac{H}{8\pi} \right) (ka) \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] \quad (\text{VI.35})$$

$$F_D = \left( \rho g \frac{H}{2} L \right) \left( \frac{L}{\pi^2} \right) A(ka) \operatorname{tg} h(kh) \quad (\text{VI.36})$$

Como o termo de inércia da Equação de Morison representa um resultado assintótico nas duas formulações, ou seja: quando as dimensões da estrutura crescem muito ( $ka \rightarrow \infty$ ), na Equação de Morison, o termo de arraste torna-se desprezível ( $F_A \approx 0$ ), e se utilizada esta formulação, ter-se-ia como resultado para a força total, unicamente o termo dado, pela componente de inércia. Por outro lado, na teoria da difração, quando as dimensões da estrutura vão se tornando pequenas ( $ka \rightarrow 0$ )  $C_M^* \rightarrow 2$ ,



isto é, ( $C_M = C_M^*$ ); a força da difração apresenta valores similares aos obtidos pela fórmula aproximada de Morison; estas assertivas se tornarão mais clara no decorrer desta seção. Logo, o termo de inércia da Equação de Morison, representa um fator adequado quando para efetuar-se as comparações desejadas.

Então, relacionando-se as forças da difração ( $F_D$ ) com as de inércia ( $F_I$ ), tem-se:

$$R_{II} = \frac{F_D}{F_I} = \frac{4}{C_M \pi} \frac{A(ka)}{(ka)^2} \quad (VI.37)$$

Trabalhando-se a Eq. (VI.37) chega-se:

$$R_{II} = \left( \frac{4}{C_M} \right) \left( \frac{H}{L} \right) \cdot \frac{A(ka)}{\pi^2 (ka)} \left( \frac{H}{D} \right) \quad (VI.38)$$

ou

$$\frac{H}{D} = C_M \left( \frac{\pi^2}{4} \right) \left( \frac{H}{L} \right) \frac{(ka)}{A(ka)} (R_{II}) \quad (VI.39)$$

para as condições:

$$C_M = 2 \quad \text{e} \quad H/L = 1/7$$

vem:

$$\frac{H}{D} = \frac{\pi^2}{14} \left( \frac{ka}{A(ka)} \right) R_{II} \quad (VI.40)$$

Para relação Froude-Krilov ( $F_k$ ) e inércia ( $F_I$ ) se tem:

$$R_{III} = \frac{F_k}{F_I} \approx \frac{1}{2} \quad (VI.41)$$

que conduz a:

$$\frac{H}{D} = 2 \pi \left( \frac{H}{L} \right) \left( \frac{1}{(ka)} \right) R_{III} \quad (VI.42)$$

com  $H/L = 1/7$  resulta:

$$\frac{H}{D} = \frac{2}{7} \pi \frac{1}{(ka)} R_{III} \quad (VI.43)$$

Fazendo-se  $R_I = R_{II} = R_{III} = 1$ , introduzindo-se o parâmetro ( $H/L = 1/7$ ) na Eq. (VI. ), e plotando-se ( $H/D$ ) versus ( $ka$ ) para todas as relações de forças, ter-se-ã as curvas apresentadas na Figura (VI.4). Pode-se observar que as forças de inércia se orientam para a porção inferior das curvas, enquanto que o arraste se orienta para a porção superior.

Da análise e interpretação desta Figura se extraí as seguintes constatações:

Para o intervalo correspondente a  $0,1 < ka < 0,55$  e respectivos correspondentes  $4,5 < H/D < 0,85$ , tem-se uma região onde o termo de inércia da Equação de Morison, é equivalente aos valores obtidos pela teoria da difração. Todavia, para  $0,15 < ka < 2\pi/10$  tem-se os efeitos de inércia predominantes, sendo que o arraste será menor do que 5% da força hidrodinâmica total, onde então se terá valores muito próximos, quer se use a Equação de Morison, ou a teoria da difração, sendo que a diferença máxima entre estes cálculos está em torno de  $\pm 3\%$ , zona em que por simplicidade, se pode recorrer a solução aproximada (Equação de Morison).

#### VI.5-2 - Forças Adimensionais

Usando-se variáveis adimensionais, aumenta-se a abrangência da análise, proporcionando a extração de maiores informações dos resultados.

Para  $C_M = 2$ ,  $C_D = 1$ ,  $K_x = 0$ , e adimensionalizando-se as expressões das forças totais, pelo fator  $(\rho \pi a^2) g \frac{H}{2}$  obtem-se as equações:

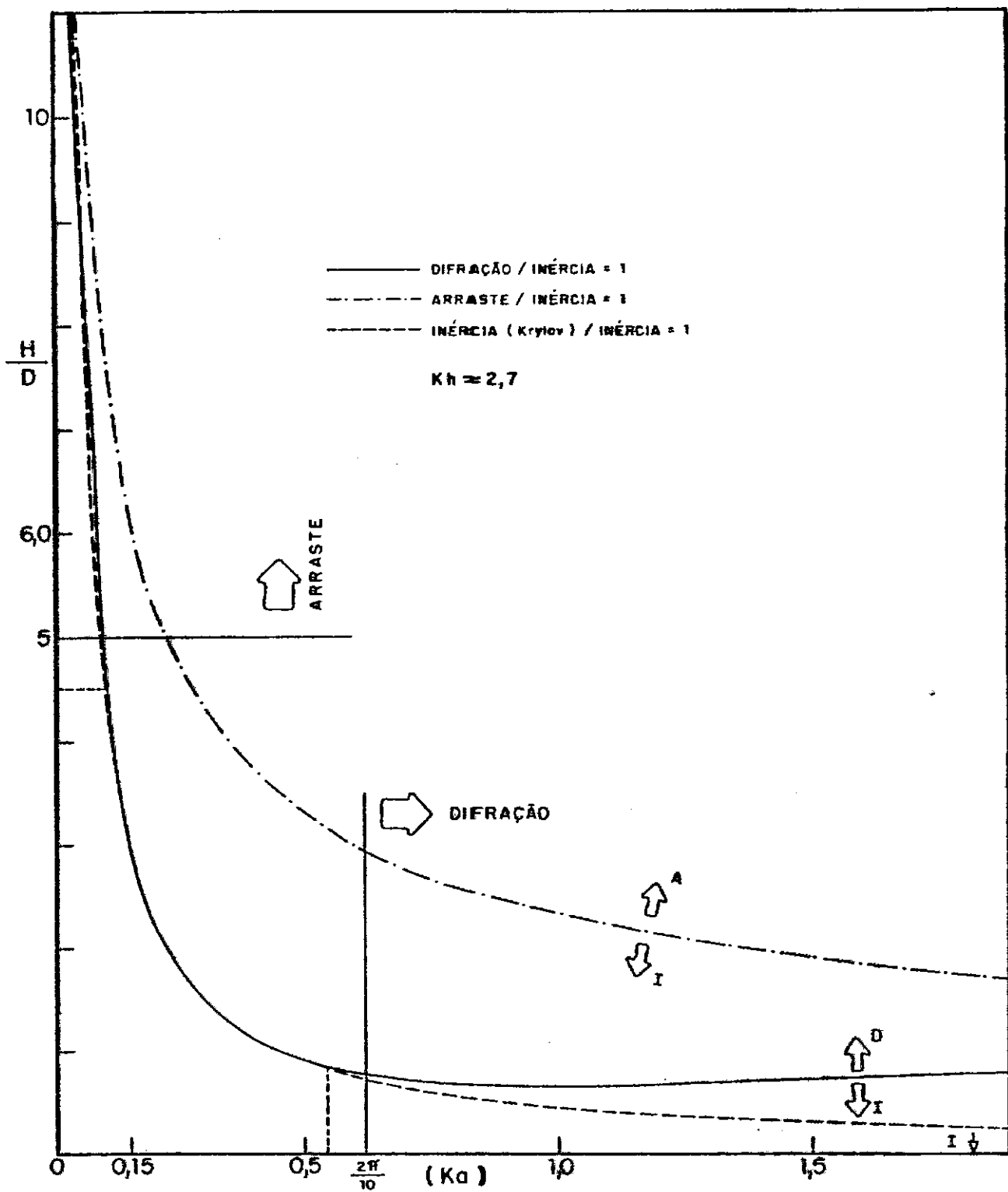


FIG. VI.4 -  $(\frac{H}{D})$  versus  $(Ka)$  para curvas representativas da relação unitária de forças.

$$\bar{F}_k = \operatorname{tg} h(kh) \cos \omega t \quad (\text{VI.44})$$

$$\bar{F}_I = C_M \operatorname{tg} h(kh) \cos \omega t \quad (\text{VI.45})$$

$$\bar{F}_A = C_D \left( \frac{1}{4\pi a} \right) \left[ 1 + \frac{2kh}{\operatorname{sen} h(2kh)} \operatorname{sen}(\omega t) \right] \operatorname{sen} \omega t \quad (\text{VI.46})$$

$$\bar{F}_D = C_M \operatorname{tg} h(kh) \cos(\omega t - \delta) \quad (\text{VI.47})$$

As Figuras (VI-5a,b) mostram para a varredura da onda (um ciclo) sobre a estrutura, a variação comparativa das forças totais adimensionais em função do tempo ( $\omega t$ ) para dois valores do parâmetro de espalhamento: ( $ka = 0,001$ ) e ( $ka = 0,1805$ ). Pode-se observar que para o menor ( $ka$ ), o efeito de arraste é dominante, contribuindo integralmente para força total de Morison. No outro caso nós temos a baixa participação do arraste, e a força praticamente dada pelo termo de inércia, que coincide aproximadamente com a força de difração; constatação estas que eram de se esperar, pois ao olhar-se as Figuras (VI-3) e (VI-4) poder-se-á notar, que para as características da onda apresentada, o menor valor de ( $ka$ ) situa o caso numa típica região de arraste; enquanto que para o valor maior de ( $ka$ ), numa zona típica de interceção dos efeitos de inércia e difração.

Nota-se também, a posição relativa da onda e as amplitudes das forças, sendo que a força de pico é arrastada para a posição do máximo individual da componente predominante no efeito.

Para os mesmos parâmetros característicos fornecidos na Figura (VI-5b), a Figura (VI-6), mostra a variação comparativa das forças adimensionais com a profundidade, para duas posições bem representativas da onda. Como o movimento da onda é oscilatório, se terá mesmos valores para as forças, só com o sinal contrário, em posições correspondentes às mostradas.

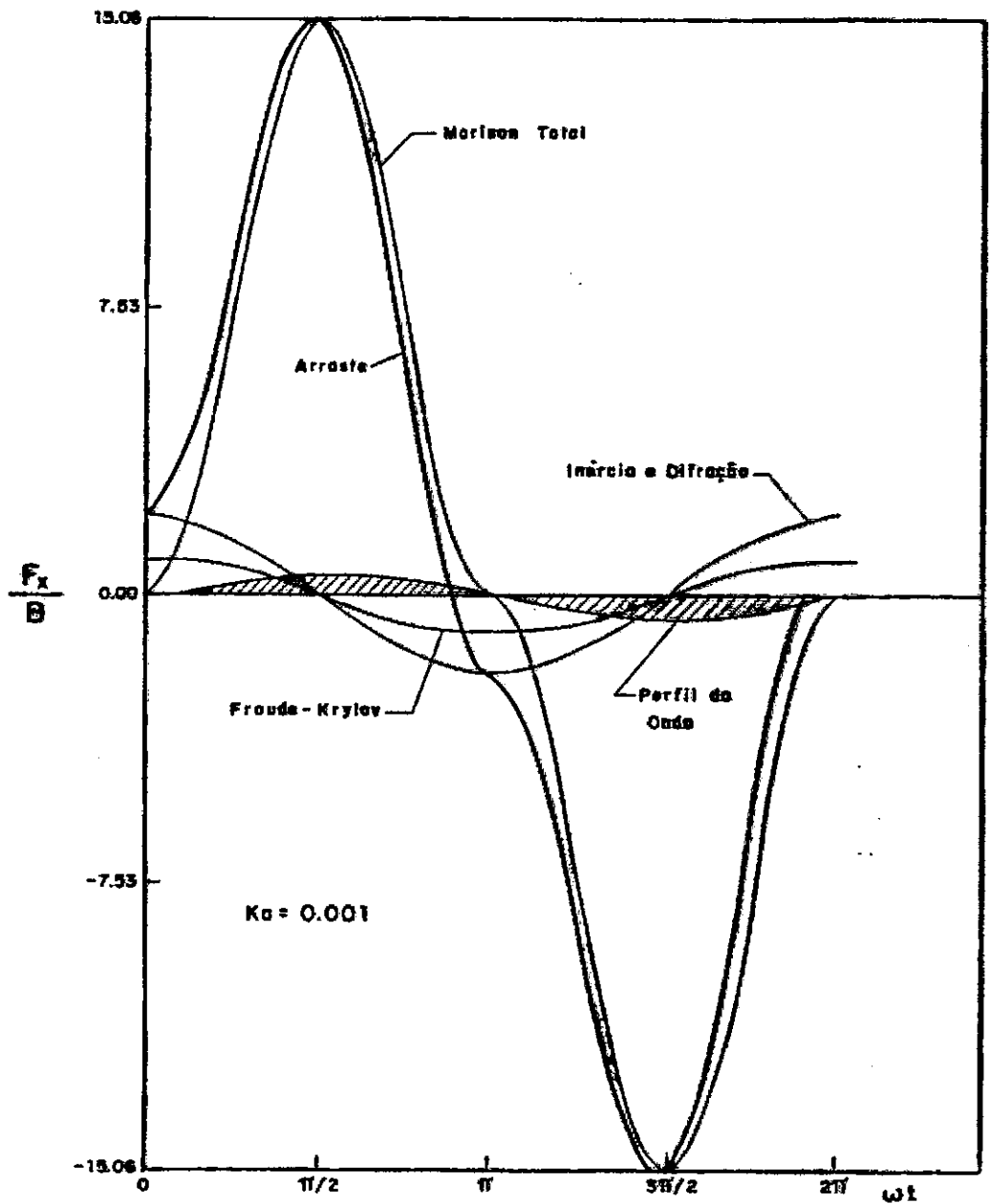


FIG. VI.5a - Variação no tempo das forças adimensionais de: arraste, inércia, total de Morison, Froude - Krylov, difração e a elevação relativa da superfície livre - ( $\omega t$  em Graos).

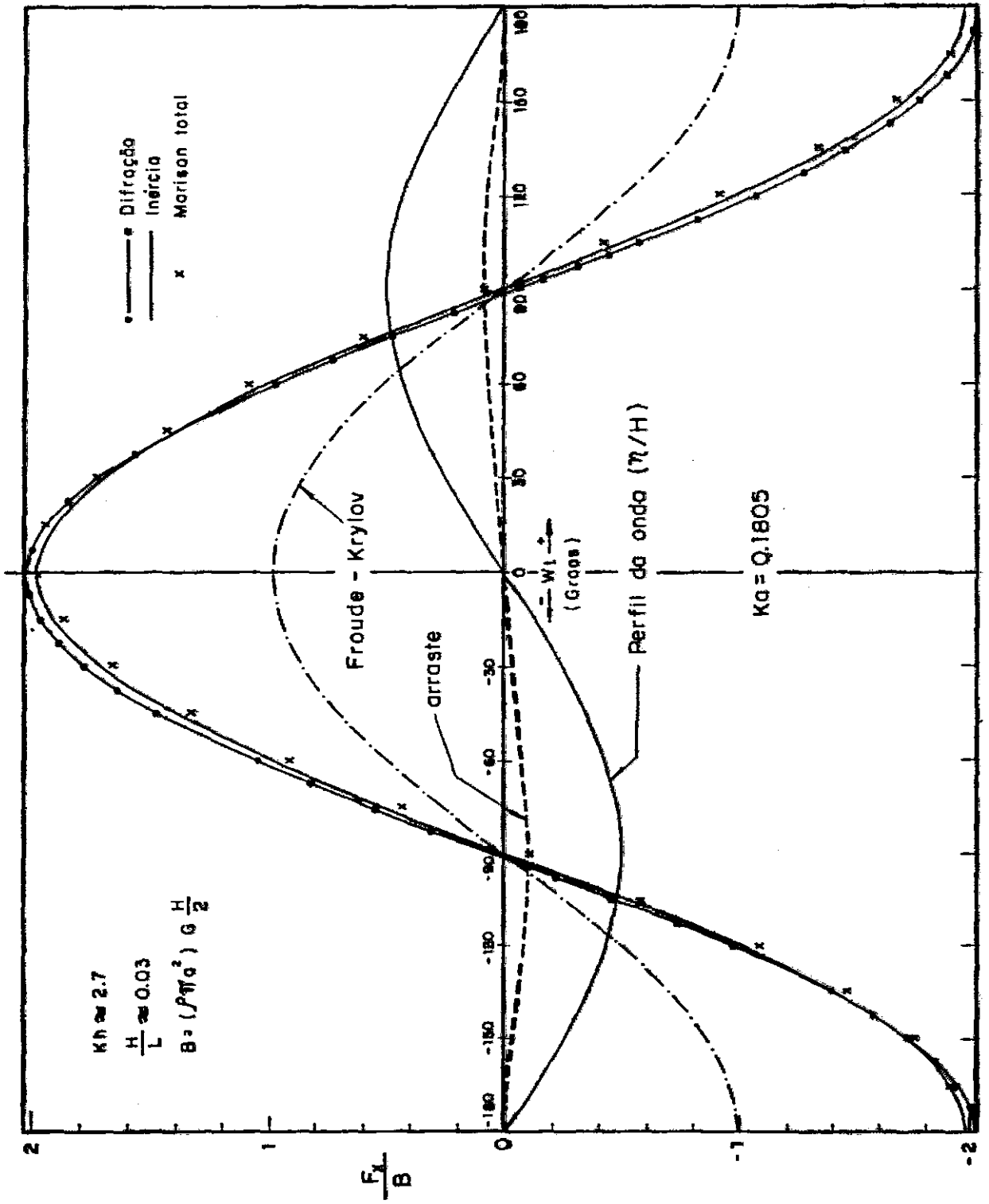


FIG. V, 5b

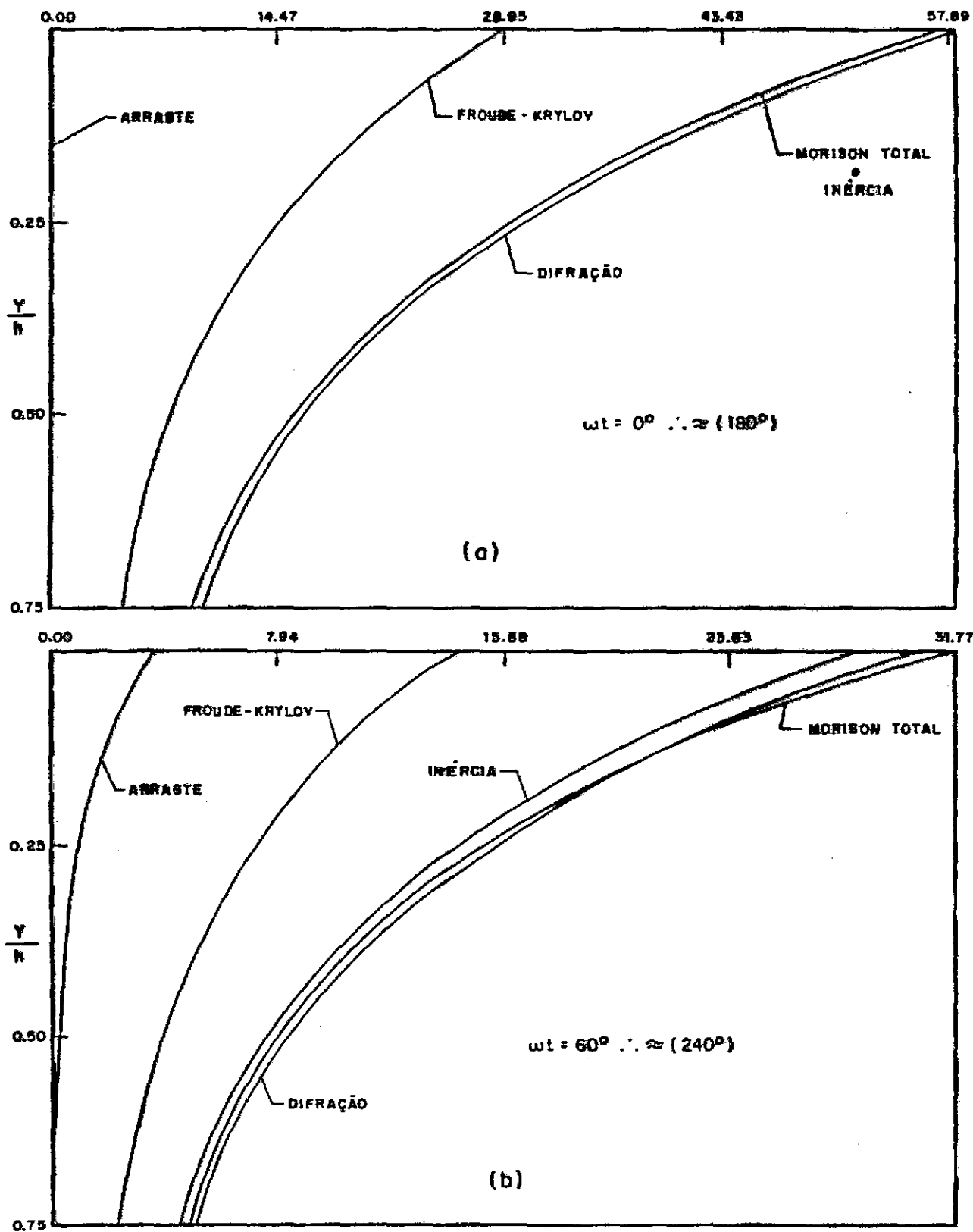


FIG. VI. 6 - Variação das forças adimensionais com a profundidade.  
(wt em Graos)

### VI.5-3 - FORÇAS ADIMENSIONAIS VERSUS O PARÂMETRO DE ESPALHAMENTO

Dada a importância do parâmetro de espalhamento ( $ka$ ) na caracterização dos efeitos de interação onda-estrutura, torna-se interessante mostrar o comportamento e grau de participação das forças, em função de suas variações. A Fig. (VI-7a) com um detalhe na precedente Figura, tenta mostrar estas variações.

Trabalhando-se com as equações das forças máximas, é possível chegar-se a uma expressão explícita de dependência de ( $ka$ ), quando adimensionalizadas pelo fator ( $B$ ).  $C_M = 2$  e  $C_D = 1$ .

A Figura (VI.7b) apresenta as forças horizontais máximas adimensionais em função do parâmetro de espalhamento ( $ka$ ). Pode-se novamente observar a predominância do arraste para os valores baixos ( $ka \ll 1$ ), da inércia para as intermediárias ( $ka \approx 1$ ), e da difração para os valores mais altos ( $ka \approx > 1$ ).

É importante se notar na Figura (VI-7a) e no detalhe desta, que exatamente na zona de predominância da inércia, existe uma região de interceção de Morison e da difração; faixa ( $\pi/21 \leq ka \leq 2\pi/10$ ) para a qual tanto a formulação de Morison como da difração conduz a resultados semelhantes.

Como complementação destes resultados, que vão gradualmente se orientando a definição de limites mais precisos, para os efeitos comparados neste Capítulo, a Figura (VI-8) mostra o grau de participação em percentagem de cada um destes efeitos, no cômputo global das forças, em função de ( $ka$ ), tornando-se os valores obtidos para Morison como comparação, atribuindo-lhe o peso (100%).

Outra vez se evidencia o fato de pouca representatividade do arraste para valores não muito baixos de ( $ka$ ), sendo que é possível instituir o limite de  $\approx \pi/21$  (5%) de participação do arraste na força total); como limite da influência dos efeitos de viscosidade, desde que controlado o parâmetro de



( $H/D \approx < 5$ ). Para a influência dos efeitos de inércia, estabelece-se como limite, o valor de  $ka \approx 2\pi/10$ , que corresponde aproximadamente a diferença de 5% no limite superior da faixa de interseção das formulações de Morison e da difração. A partir deste limite ambas as formulações se defasam violentamente, fato que indica a inadequação da Equação de Morison para o problema, uma vez que os resultados obtidos por esta, conduziriam a valores ultra-conservadores. Portanto, acima de  $ka \approx 2\pi/10$  e abaixo de  $ka \approx \pi$  (ponto em que a onda vê a estrutura, como uma imensa parede vertical = condição intuitiva de reflexão total) tem-se a região de influência da difração.

As Figuras apresentadas são muito sugestivas; de sua análise e interpretação, outras tantas informações poderão ser extraídas.

#### VI.6 - COMENTÁRIOS

Como pode ser facilmente percebido, a formulação de Morison (E.M.) é um resultado semi-intuitivo, pois nasce de um termo de inércia, que é exatamente a forma que resulta da teoria de fluxos não viscosos; enquanto o arraste, surge da forma usada em fluxos permanentes. Esta formulação pode se conciliar com a análise dimensional do problema se os coeficientes empírico  $C_M$  e  $C_D$  forem considerados como dependentes de  $Re$ , deslocamento relativo, o ângulo de fase e etc.... A suposição de valores constantes para  $C_M$  e  $C_D$  num ciclo do movimento é cômodo, e parece ser válido para cilindros lisos, mas não para cilindros rugosos, pelo menos para valores intermediários de  $(H/D) |^{183}|$ .

A E.M. fornece as forças de onda sobre corpos delgados e representa a forma assintótica da teoria da difração (T.D.) quando ( $ka \rightarrow 0$ ). Se os efeitos da viscosidade são desconsiderados, a T.D. fornece resultados semelhantes ao termo de inércia da E.M., quando nesta última ( $ka \gg 1$ ).

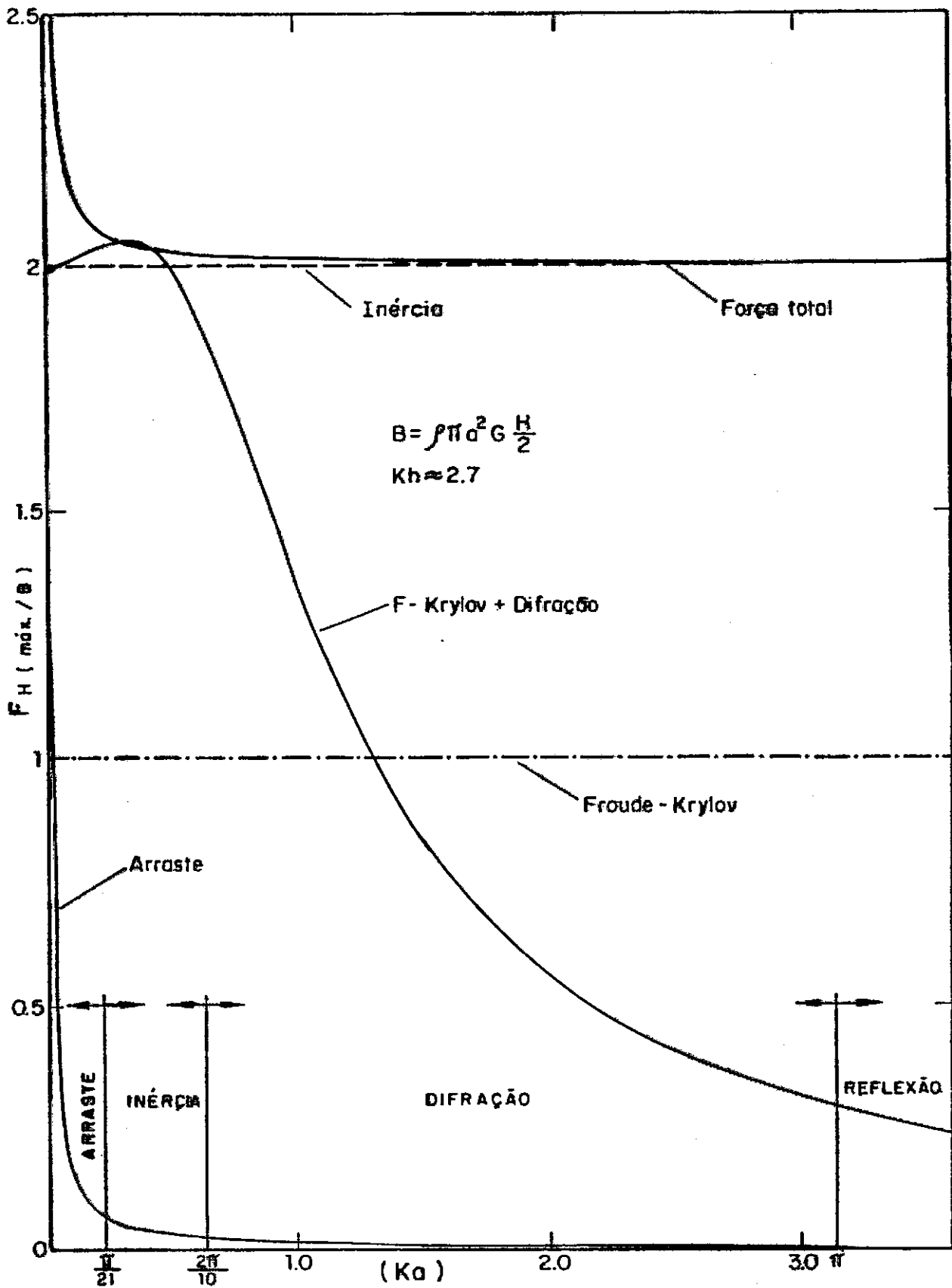


FIG. VI. 7a-Curvas representativos do domínio e contribuições das forças.

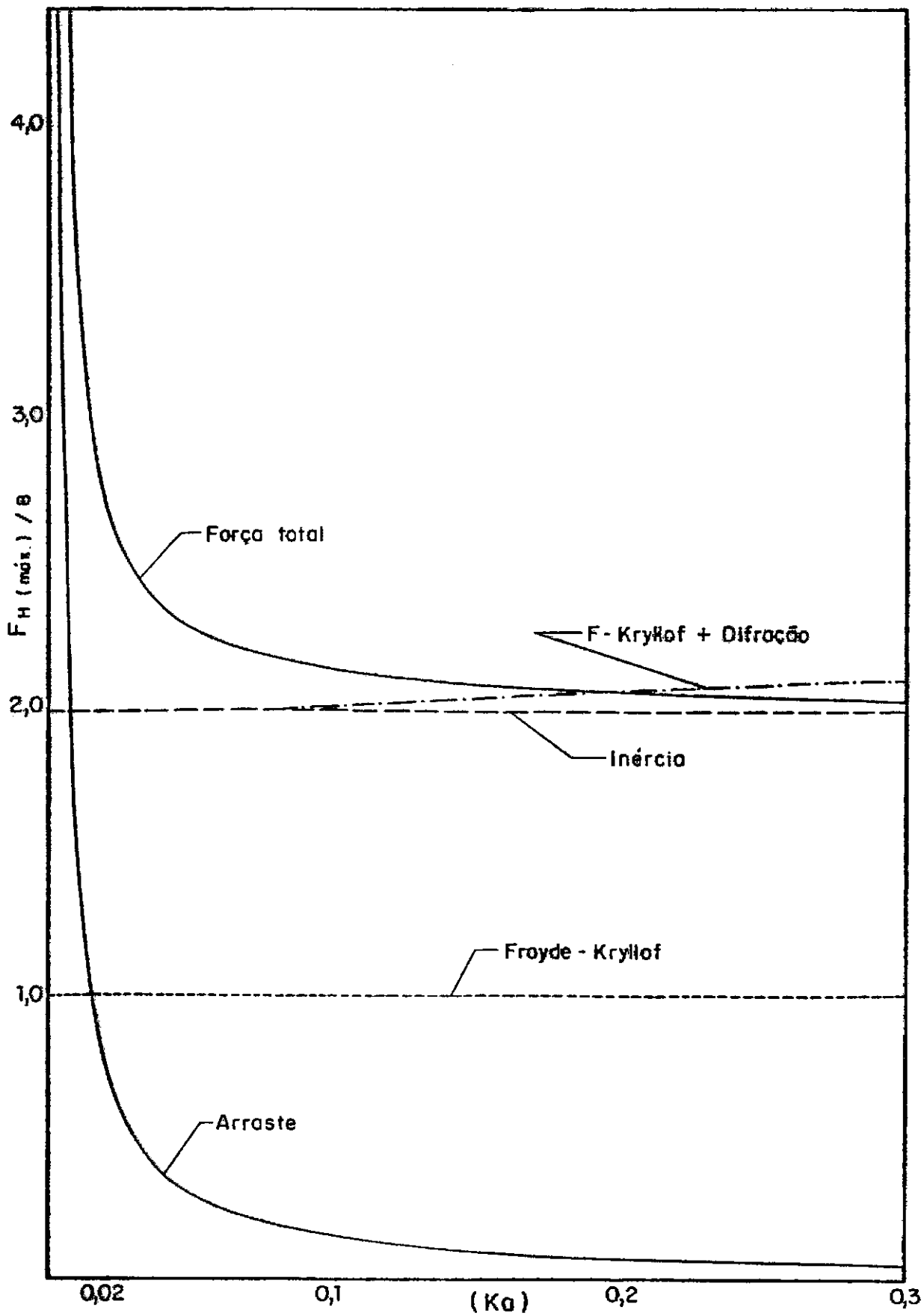
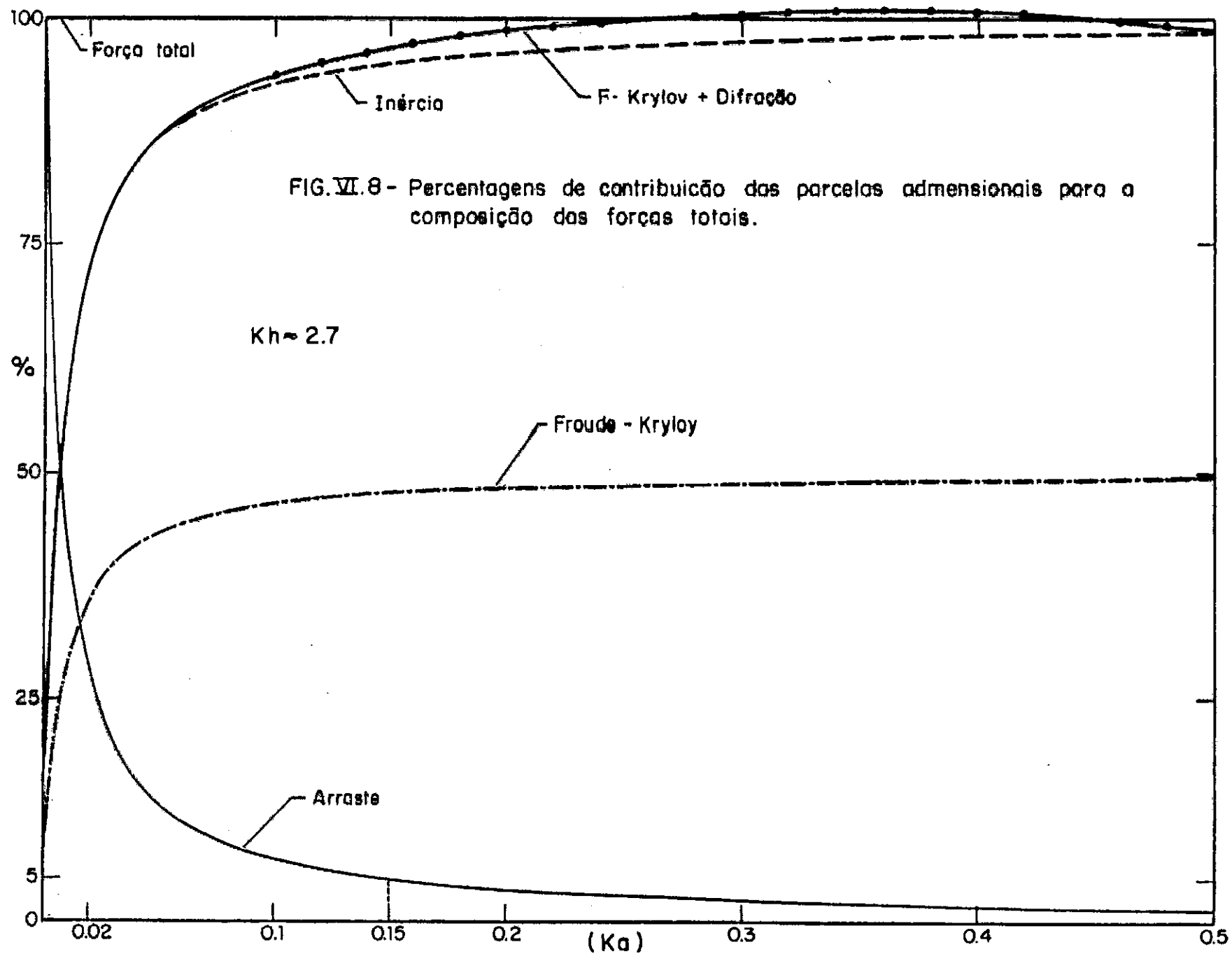


FIG. VI.7b- Detalhe da figura anterior.



A T.D. apresentada neste trabalho, representa a solução exata do problema da difração para estruturas cilíndricas circulares verticais. E como foi visto, o coeficiente efetivo de inércia  $C_M^* = 1 + C_1$  se aproxima de 2,0, quando  $ka \rightarrow 0$ . Então, a T.D. se conduz a E.M., quando  $ka \rightarrow 0$ ; mostrando que para  $ka \approx \pi/10$  pode-se estabelecer um limite prático de utilização da E.M., a partir do qual a T.D. poderá ser indiscutivelmente utilizada.

## VI.7 - CONCLUSÕES

O estudo desenvolvido neste Capítulo, pode ser apresentado graficamente, e de uma forma tal, que reúna todas as condições possíveis, a ponto de sugerir com segurança a aplicação de seus limites.

A Figura (VI-9) mostra um procedimento conveniente de representação das regiões de aplicabilidade da teoria da difração não viscosa e da Equação de Morison, para uma estrutura cilíndrica circular vertical.

O gráfico é plotado para linha de máxima inclinação da onda, isto é, para o maior valor possível de  $H/L = 1/7$  (máximo valor para existência de ondas em águas profundas), e todos os casos possíveis estão representados abaixo desta linha. A região duplamente achuriada, limitada pelos pontos  $H/D \approx 1$  e  $ka = 2\pi/10$ , mostra a zona, em que ambos os procedimentos poderão ser utilizados. As regiões para grandes valores de  $H/D$  (efeitos viscosos predominam), e  $ka$  (efeitos de difração predominam), mostram zonas em que um nem outro procedimento poderá ser aplicado. Também, pode-se observar, que nunca os efeitos viscosos e de difração acontecem ao mesmo tempo. E os efeitos viscosos, por outro lado, só tem relevância, onde a Equação de Morison é válida.

Para  $H/D > 6,0$  a força de arraste viscosa será maior que 5% da magnitude da força hidrodinâmica total, e

$L \approx 21$  vezes  $D$ , todavia uma modificação, num dos parâmetros envolvidos na plotagem da curva, poderá alterar estes valores, tal como a percentagem do arraste em relação a força total.

A região achuriada indica também a zona onde a força está em fase com a aceleração das partículas da onda, e para  $ka < 2\pi/10$  a solução aproximada (E.M.) pode ser usada para o cálculo das forças.

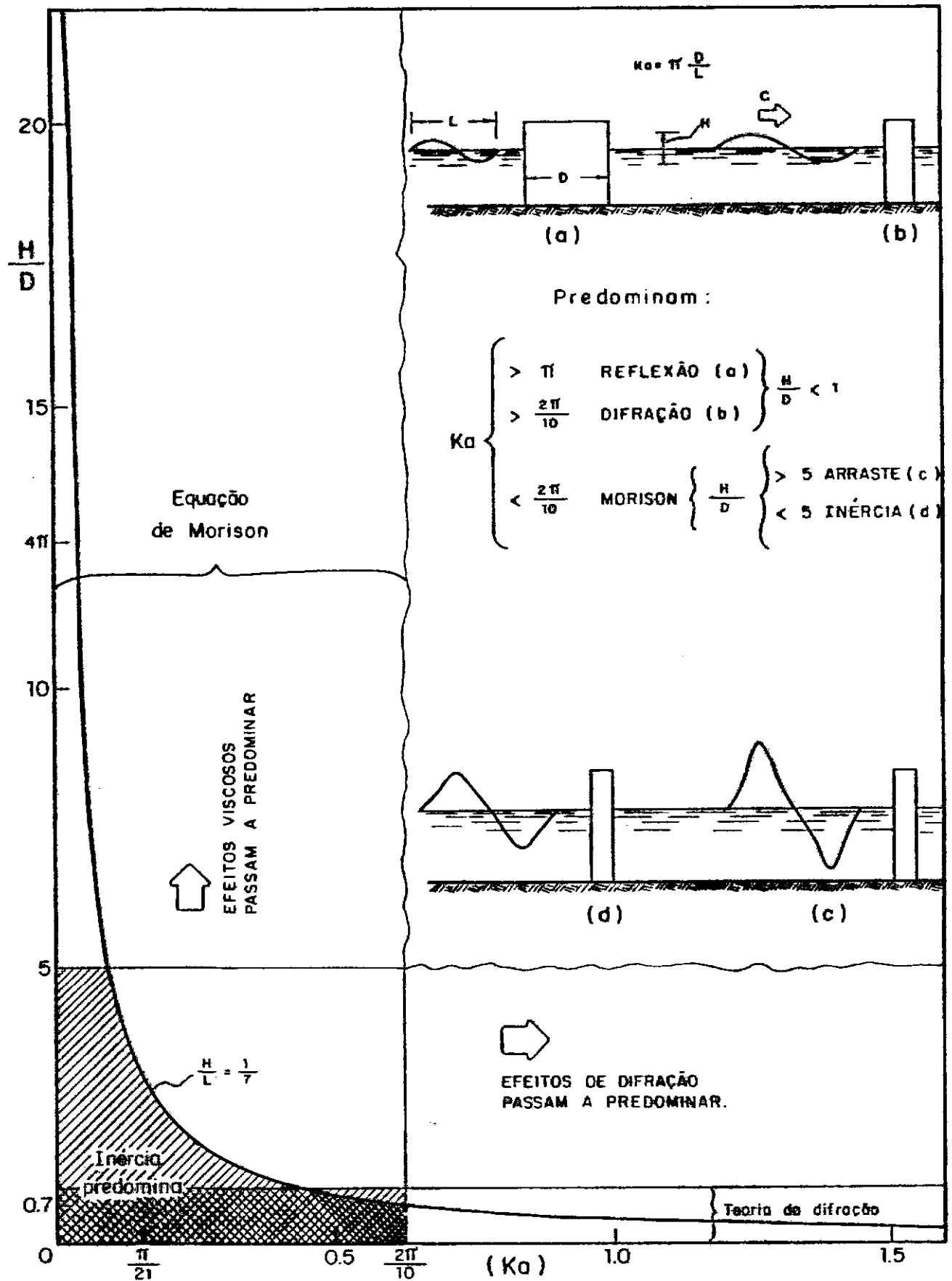


FIG.VI.9 - Representação das regiões de aplicabilidade da teoria da difração invicita e da equação de Morison para estruturas cilíndricas.

CAPÍTULO VIIPARTE IVII.1-1 - INTRODUÇÃO

Na análise da interação onda-estrutura, em estruturas fixas parcialmente submersas em água, se requer considerações especiais que não surgem nas estruturas em terra. Qualquer procedimento, visando compreender o fenômeno, deverá reconhecer a presença de solicitações dinâmicas adicionais, bem como, modificações nas propriedades dinâmicas causadas pela água circundante, uma vez que, o comportamento dinâmico da estrutura é notadamente diferente.

As formulações apresentadas para o cômputo das solicitações pressupõe a estrutura como sendo rígida; no entanto, se a estrutura tiver uma resposta dinâmica, seus movimentos induzidos serão significativos, quando comparados com as velocidades e acelerações das partículas d'água, e neste caso deveria ser considerado o movimento da estrutura.

É sabido que o parâmetro mais importante, que determina a sensibilidade das estruturas no mar aos efeitos dinâmicos é a frequência natural da estrutura; que coincide com frequência de excitação (desprendimento de vórtice, onda, etc..) produzirá uma condição de ressonância, e conseqüente aumento da resposta. Três quantidades são importantes na determinação das frequências naturais: a massa efetiva da estrutura, a rigidez e o amortecimento, que em relação a frequência de excitação e a natural, determinam zonas características de suas influência, e o controle do comportamento da resposta.

Uma modelagem matemática do problema interação acoplado a estrutura e água, considerando-se adequadamente as leis hidrodinâmicas e constitutiva, parece ser no presente, ainda impraticável [183], as razões são perceptíveis: o desconhecimento íntimo das leis físicas e a falta de procedimentos compu



tacionais disponíveis para problemas desta complexidade.

O valor dos resultados de uma análise dinâmica depende da aproximação envolvida no estabelecimento de modelos matemáticos para a estrutura e o mar, bem como na seleção de várias condições de cargas dinâmicas. Em geral a formulação do modelo, e a análise dos resultados são as fases mais críticas da análise dinâmica, ainda não considerado que o método particular de análise não introduza erros adicionais na solução do modelo para cargas específicas.

Efetivamente um método (numérico) para a análise dinâmica depende primariamente de dois fatores: a minimização do armazenamento e do tempo de execução computacional.

O presente trabalho faz uso de um programa (LORANE/DINA) que atende estas características conforme mostrou Lima |<sup>99</sup>| no seu meritório trabalho.

Deve ser notado que, sem as devidas simplificações, uma estrutura apresenta um número muito grande de graus de liberdade, quando submetidas às cargas dinâmicas. Uma das preocupações principais na escolha do modelo matemático é reduzir o problema a um número limitado de graus de liberdade. Por isso, uma considerável reprodução do comportamento dinâmico esperado do sistema, precisa estar presente, se um modelo matemático realístico é estabelecido. O modelo precisa ser capaz de representar a ambos, a significativa propagação da onda e o comportamento da vibração estrutural.

Graças a potencialidade do programa utilizado neste Capítulo (Lorane-Dina), a análise dinâmica através dele, permite se obter as frequências naturais, os modos normais, as respostas: transiente, em frequência e aleatória pelo método direto ou modal. Com estes procedimentos ter-se-á com grande facilidade e confiabilidade nos resultados necessários a um programa de projeto.

Neste Capítulo, em sua primeira parte, apresenta-se a teoria básica da dinâmica das estruturas, destacando-se aspectos do comportamento dinâmico de estruturas no mar. A segunda parte é reservada às aplicações práticas, com a análise dinâmica de várias estruturas. A terceira e última parte, se destina a interpretação dos resultados do trabalho, conclusões, e recomendações.

## VII.1-2 - SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

Os tipos de estruturas "off-shore" para as quais o presente trabalho se orienta, são estruturas em que seus membros (ou a estrutura toda) possuem uma dimensão predominante em relação as outras; de forma que poderão ser representadas por componentes cilíndricos engastados no fundo do oceano (ou no "caisson"), de modo que seu comportamento se assemelha a de uma viga em balanço, e o sistema com um grau de liberdade representa a primeira aproximação para o problema.

Sabe-se que as ondas produzidas num estado de mar aleatório, pode fazer com que a estrutura vibre em muitos de seus modos. A faixa de frequência das forças causadas por ondas podem ir de 0,04 Hz a 0,70 Hz [118], que correspondem a comprimentos de onda desde 975 a 3 m. Nos últimos anos estruturas construídas em águas profundas, com lâminas d'água de 100 a 200 m, têm apresentado sensíveis frequências de vibrações (ordem de 0,125 Hz a 0,25 Hz), caindo dentro do espectro de frequência do mar; estas frequências passam pelas frequências de flexão da estrutura aumentando a chance da estrutura experimentar vibrações extremas, e conseqüentemente desastres.

Para estes tipos de estruturas, o primeiro modo de forma, é o mais importante modo de vibração, e corresponde a mais baixa ou natural frequência flexional da vibração. Ainda que altos modos existam e possam ser excitados, as amplitudes de tais vibrações tendem a diminuir rapidamente devido ao amor

tecimento estrutural e do meio (mar), por esta razão, o modelo matemático de uma estrutura "off-shore" fixa será tomado com um grau de liberdade (na primeira aproximação).

### VII.1-2.1 - Vibrações Livres

A estrutura é representada por um modelo, com a inércia de uma simples massa ( $M$ ) e a rigidez de uma mola ( $k$ ), Figura (VII-1), sem o amortecedor. Considera-se a massa se movendo na direção transversal (direção da força) e somente uma coordenada,  $x$ , define sua posição. Deste modo, o modelo é descrito como um sistema de um grau de liberdade (SUGL); este simples modelo pode proporcionar resultados vantajosos em muitos casos práticos de engenharia, e ao mesmo tempo, um adequado modelo para uma avaliação inicial.

Seja um sistema, massa mola, simulando a estrutura, onde  $F_0$  é uma força estática, que deforma a mola de uma quantidade ( $x_0$ ). Uma força igual e oposta ( $F_R$ ) força restauradora da mola) surge.

$$F_R = K x_0 \quad (VII.1)$$

Se ( $F_0$ ) é removida instantaneamente, o sistema deixará seu equilíbrio e oscilará, sendo que o excesso de força na mola causa uma aceleração na massa; e o movimento chamado harmônico simples (MHS). Para qualquer tempo, a força restauradora será:

$$F = K x \quad \text{e} \quad \ddot{x} = d^2x / dt^2 \quad (VII-1a)$$

Logo:

$$M \ddot{x} = -F = -K x \quad \text{ou} \quad M \ddot{x} + K x = 0 \quad (VII.2)$$

com as  $x = x_0$  para  $t = t_0$ , a solução é:

$$x = x_0 \cos \omega_1 (t - t_0) \quad (\text{VII.3})$$

para  $t > t_0$ , após a liberação de  $F_0$

$$\ddot{x} = -\omega_1^2 x_0 \cos \omega_1 (t - t_0) = -\omega_1^2 x \quad (\text{VII.4})$$

a aceleração máxima ocorre no ponto em que o movimento muda de direção, isto é  $x = x_0$ ,

$$\therefore \ddot{x}_0 = -\omega_1^2 x_0 \quad (\text{VII.5})$$

Levando-se a Eq. (VII.5) em (VII.2), tem-se:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}} \text{ rds/s} \quad (\text{VII.6})$$

$\omega_1$  = frequência natural circular da estrutura; o subíndice (1) denota (S.U.G.L)

$N_1$  = frequência natural ( $H_z$ ) e  $T_1 = \frac{1}{N_1}$  = Período (s)

então:

$$T_1 = 2\pi/\omega_1 \text{ (s)} \quad \therefore \quad N_1 = \omega_1/2\pi \text{ (H}_z\text{)} \quad \therefore \quad N_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (\text{VII.7})$$

O exame da Equação (VII.6) revela que a frequência natural de oscilação da estrutura cresce com o crescimento da rigidez ou pela redução da massa.

Nesta idealização, não existe energia absorvida pelo sistema, e a amplitude de oscilação do deslocamento, tensões, etc..., permanecem constantes. Na verdade, todas as estruturas reais dissipam energia (conversão de energia cinética em calor) e a amplitude diminui do valor inicial. A taxa de absorção desta energia e a conseqüente amplitude de decaimento, depende de uma propriedade da estrutura chamada amortecimento. A energia absorvida ocorre devido ao atrito interno do material,

devido aos efeitos de fricção nas vinculações, e também a dissipação no solo e água circundante.

Na prática é conveniente e realístico representar-se todo o amortecimento como uma força resistente ao movimento e proporcional a velocidade, isto é:

$$F_A = C \dot{x} \quad (\text{VII.8})$$

Esta força de amortecimento ( $F_A$ ) tem um máximo quando a velocidade é máxima, isto é, quando o deslocamento passa em sua posição média. Esta forma de amortecimento é denominada de amortecimento viscoso, porque pode ser reproduzido pelo movimento de uma placa num líquido viscoso. Ele é representado esquematicamente na Figura (VII-1) sem o carregamento harmônico.

A Equação do Movimento (VII.2) fica:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (\text{VII.9})$$

Para este caso, retirado ( $F_0$ ) bruscamente, as amplitudes do deslocamento ( $p$ ) diminuirão devido a presença do amortecimento. A amplitude decai logaritmicamente, e uma medida desta, é definida como o logaritmo natural da amplitude de dois sucessivos picos na oscilação, então, o decaimento logaritmico ( $\delta$ ), será:

$$\delta = \ln \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) \quad (\text{VII.10})$$

$\delta$ , também representa a variação da energia num ciclo de decaimento, para pequenos valores deste vem:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\text{Energia } (n) - \text{Energia } (a_{n+1})}{\text{Energia } (n)} \quad (\text{VII.11})$$

O crescimento do amortecimento, estrutural é manifestado por um mais rápido decaimento na amplitude do movimento

to, logo após a retirada da força ( $F_0$ ). Se o amortecimento cresce a estrutura logo retorna ao repouso. Se o amortecimento cresce suficientemente uma condição é alcançada, em que o deslocamento decai ao repouso, sem passar pela posição média, este amortecimento é chamado de amortecimento crítico ( $C_c$ ). O amortecimento estrutural pode ser expresso em termos deste amortecimento, logo:

$$C_c = 2 \sqrt{MK} \quad (\text{VII.12})$$

a medida do amortecimento é dada pela taxa de amortecimento ( $\xi$ )

$$\xi = \frac{C}{2 \sqrt{MK}} = \frac{C}{C_D} = \frac{C}{2 M \omega} \quad (\text{VII.13})$$

O termo da massa na Eq. (VII.12) pode ou não conter a massa adicional e os efeitos da água dentro da estrutura.

Uma propriedade do amortecimento viscoso é que a energia dissipada por ciclo de oscilação cresce linearmente com a frequência do movimento.

Embora o amortecimento histerético represente melhor a energia dissipada dentro do material, e o amortecimento de atrito seco melhor represente as perdas nos vínculos; o amortecimento viscoso muito melhor representa todas as perdas, e estas juntas com a manutenção da linearidade das equações fá-lo amplamente usado e universalmente aceito [41].

A Tabela a seguir mostra alguns valores do amortecimento viscoso em estruturas:

Material	$\delta$	$\xi$
Aço Caldeado	0,03	0,005
Concreto	= 0,06	0,010

Tabela VII-1

### VII.1-2.2 - Resposta para um Carregamento Harmônico Simples

É particularmente vantajoso a representação do carregamento por uma função coseno, uma vez que as estruturas analisadas se encontram na zona de predominância da inércia, e mesmo que, esta função é usada diretamente para a análise de estruturas sujeitas ao desprendimento de vórtices, oscilações induzidas por fluxos e muitas formas de forças mecânicas, como as cargas causadas por bombas, geradores e máquinas.

$$F = F_0 \cos \omega t \quad (\text{VII.14})$$

Seja a resposta forçada para um (S.U.G.L.) sujeita a uma força senoidal, Figura (VII-1).

A equação do movimento será:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = F_0 \cos \omega t$$

cuja solução é:

$$x = x_0 \cos (\omega t - \phi) \quad (\text{VII.15})$$

onde:

$$\dot{x} = -\omega x_0 \sin (\omega t - \phi) \quad (\text{VII.16})$$

e

$$\ddot{x} = -\omega^2 x_0 \cos (\omega t - \phi) = -\omega^2 x \quad (\text{VII.17})$$

$x_0$  = amplitude do movimento

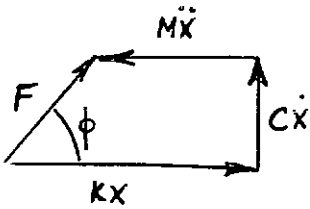
$\phi$  = ângulo de fase entre a força aplicada e o movimento

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + C^2 \omega^2}} \quad (\text{VII.18})$$

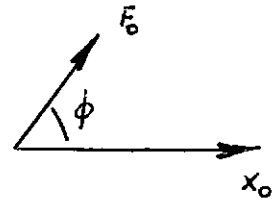
e

$$\phi = \tan^{-1} \left| \frac{C \omega}{K - M\omega^2} \right|$$

Diagrama vetorial  
das forças



Defasagem entre a  
resposta e a força



A Eq. (VII.18) representa a condição permanente, e pode ser colocada dimensionalmente:

$$\text{Taxa de frequência} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\text{Frequência Forçada}}{\text{Frequência Natural}} \quad (\text{VII.19})$$

$$\text{Taxa de Amortecimento} \quad \xi = \frac{C}{2\sqrt{MK}} = \frac{\text{Valor do Amortecimento}}{\text{Valor do Amortecimento Crítico}} \quad (\text{VII.20})$$

usando estas últimas equações e (VII.6) o deslocamento dado por (VII.18) ficará:

$$x = \left[ \frac{F_0}{K \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \right] \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{VII.21})$$

com

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right] \quad (\text{VII.22})$$

A amplitude da resposta pode ser representada adimensionalmente pela definição de um fator de amplificação dinâmica (FAD)

$$\text{FAD}, Q = \frac{\text{Amplitude}}{\text{deslocamento estático equivalente}} = \frac{x_0}{F_0/K} \quad (\text{VII.23})$$



ou

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (\text{VII.24})$$

$Q$  e  $\phi$  podem ser plotados em função de  $\beta$  para várias percentagens de amortecimento, produzindo os gráficos básicos e tão conhecidos da dinâmica.

Da relação  $x$  versus  $\beta$  (Eq. V-22), mostra que se  $\beta = \frac{\omega}{\omega_1} < 1$  o deslocamento é controlado pela rigidez.

Por exemplo: se  $\omega = \frac{1}{3} \omega_1$ , a máxima deflexão é  $\approx 13\%$  > que a produzida pelo carregamento aplicado estaticamente. Para taxas de freqüência nesta ordem ou maior, os métodos estáticos são inadequados.

Se  $\beta \approx 1$  a resposta pode ser muito maior que a deflexão estática, especialmente se  $\xi \ll 1$ .

Quando  $\beta = 1$  a freqüência forçada e a natural coincidem, isto é chamado de ressonância. Esta é a área da curva da resposta de maior interesse nos problemas dinâmicos. Na ressonância a amplitude é governada pelo amortecimento e se este tende a zero ( $\xi \rightarrow 0$ ), então teoricamente uma amplitude infinita é atingida.

Para  $\beta \gg 1$ , a resposta é reduzida, e controlada pela massa com maior intensidade que a rigidez e o amortecimento. A Figura (VII-2) mostra estas regiões características do comportamento da resposta. O crescimento do amortecimento reduz as amplitudes para todas as freqüências forçadas. O Pico da resposta ocorre para  $\beta = 1$  para baixo amortecimento. Mas para amortecimentos muito altos ( $\beta = 0,5$  e  $1,0$ ) o pico é para baixas freqüências forçadas (isto é, para  $\beta < 1$ ). A freqüência de oscilação para que o deslocamento de pico, com um dado amortecimento, ocorra é dado por:

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M} (1 - 2\xi^2)} \quad (\text{VII.25})$$

Como nas estruturas em engenharia civil, o amortecimento estrutural é pequeno, então seus efeitos sobre as frequências naturais podem ser desprezados, e a Eq. (VII-25) se reduz a (VI-7)

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

e as três regiões da Figura (VII-2) pode ser discutida:

1º) Região de baixa frequência forçada

$$f < N_1, \quad (f = \omega/2\pi)$$

$$x \rightarrow \frac{F_0}{k} \cos \omega t \quad \text{com} \quad f \rightarrow 0$$

a resposta dominante é controlada pela rigidez. A região é própria para análise estática, baseada no limite superior da combinação do carregamento estático e dinâmico.

2º) Região próxima da ressonância  $f \sim N_1$

$$x \rightarrow \frac{F_0}{2k\xi} \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{com} \quad f \rightarrow N_1$$

a resposta é predominantemente controlada pela força de amortecimento (C). A análise dinâmica é essencial e a resposta é muitas vezes maior que a prevista pela análise estática.

3º) Para região de altas frequências forçadas  $f > N_1$

$$x \rightarrow \frac{F_0}{M\omega^2} \cos (\omega t + \pi) \quad \text{com} \quad f \rightarrow \infty$$

a resposta é predominantemente controlada pela massa (M). A resposta é pequena quando comparada com a força estática de mesma magnitude, todavia ao cálculo da fadiga pode ser importante.

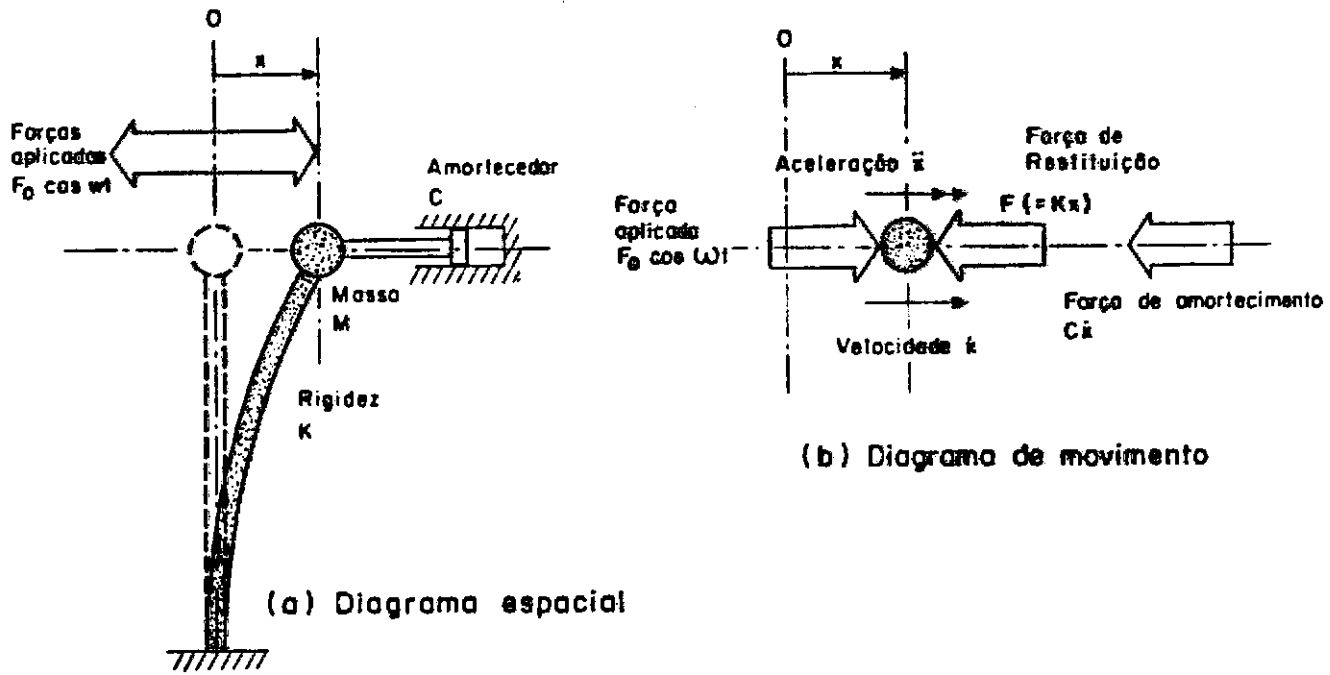


FIG. VII.1 - Vibrações forçadas em sist. com 1 G.L. (com amortecimento viscoso)

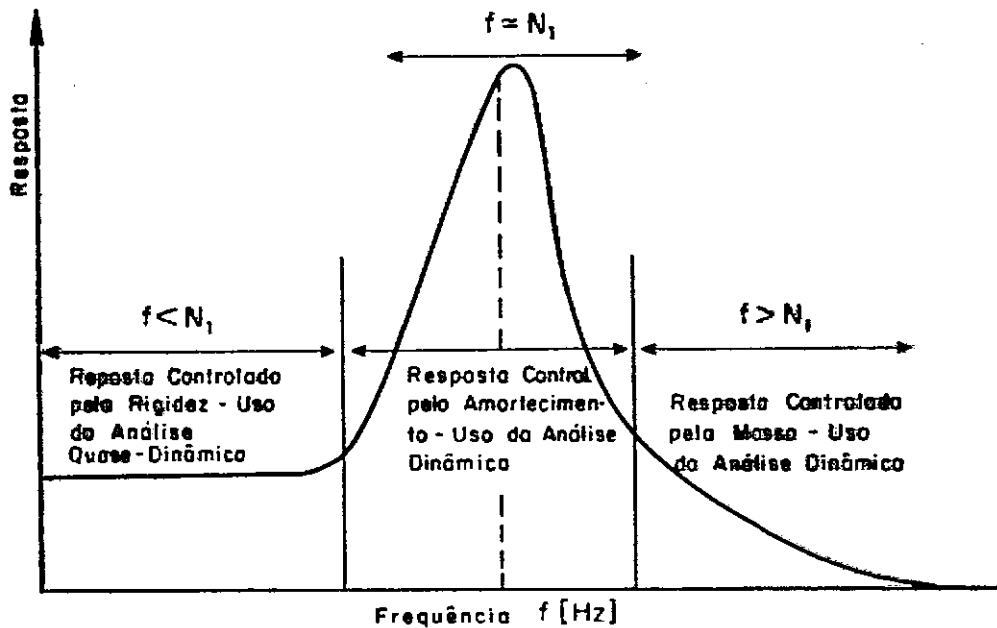


FIG. VII.2 - Regiões características do comportamento da resposta.

A amplificação da amplitude na ressonância em relação ao deslocamento estático vem da Eq. (VII.23, 24):

$$Q \approx \frac{1}{2\xi} \quad (\text{VII.26})$$

(FAD) só é função do amortecimento, se relacionando com este através de outras expressões:

$$\text{taxa de amortecimento} \quad \xi = \frac{C}{2 \sqrt{MK}}$$

$$\% \text{ do amortecimento crítico: } \gamma = \xi \times 100 \%$$

$$\text{decremento logarítmo} \quad \delta = 2 \pi \xi \quad (\text{VII.27})$$

$$\text{então FAD será: } Q = \frac{\pi}{\delta} \quad (\text{para ressonância})$$

Por estas expressões, a Eq. (VII.13) pode fornecer a força de amortecimento na equação de movimento por:

$$C = 2 M N_1 \delta \quad (\text{VII.28})$$

Foi realçado nesta seção a importância das relações entre a frequência de excitação ( $\omega$ ) e a frequência natural ( $\omega_1$ ), particularmente se o amortecimento estrutural é baixo. Em muitos casos, previamente dá-se a conhecer a possibilidade da ressonância ocorrer; então antes de mais nada, a inaceitabilidade desta condição deverá ser evitada. Para isso, a Tabela (VII-2) [41] mostra a faixa de frequências envolvidas numa série de casos de forças dinâmicas devido ao meio fluido.

Tipo de Força Fluídica	Faixa Típica de Frequência (Hz)	Período (s)
Vento turbulento	0,05 - 20	20 - 0,05
Velocidade variável no fluxo da maré	1,0 - 10	1,0 - 0,1
Desprendimento de vórtice	0,5 - 3,0	2 - 0,3
Força das ondas	0,05 - 1,0	20 - 1,0
Ondas de longo período	0,001 - 0,05	100 - 20
Fluxo das marés	0,0002	5000

Tabela VII-2

Forças fluídicas e suas frequências típicas

VII.1-3 - SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE (SUGL)

Tal como foi visto na seção anterior, os S.U.G.L. descrevem bem o princípio básico dos problemas dinâmicos, e tem sucesso em muitas aplicações estruturais; todavia, são inadequados para representarem uma série de problemas mais complexos em engenharia. Para estes casos muitas massas, molas e amortecedores são usados na descrição do modelo, assim como, estas massas podem se mover em muitas direções, estando por isso, associadas a vários graus de liberdade. (Até 3 translações e 3 rotações por massa) daí a denominação de sistemas com vários graus de liberdade.

A proposição primária é dividir a estrutura (discretizar o contínuo) e, vários pontos, sempre maior, que o simples sistema massa-mola-amortecedor (SUGL); permitindo com isso uma maior precisão no cálculo da frequência natural mais baixa (frequência fundamental). Em continuação, se calcula as frequências mais altas e depois a forma defletida. Na teoria, a distribuição completa de massas na estrutura, conduz a um número infinito de frequências naturais, todavia, somente as cinco primeiras são geralmente importantes, para estes tipos de problemas. É a seleção adequada dos sistemas massa-mola, uma das mais difíceis tarefas na análise dinâmica.

### VII.1-3.1 - Vibrações Livres em Sistemas com Muitos Graus de Liberdade

Tal como se conhece na mecânica das estruturas, o procedimento matricial poderá ser aqui utilizado; então a equação do movimento (VII.2) poderá ser reescrita novamente, só que para um sistema com "n" graus de liberdade (n.G.L.)

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{k}} \underline{x} = \underline{0} \quad (\text{VII.29})$$

onde:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & M_n \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz de massa discreta (matriz diagonal)}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ k_{n1} & & & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz de rigidez}$$

e

$$\underline{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{\ddot{x}}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} \quad \text{são os vetores de deslocamento e aceleração}$$

Considerando que a matriz harmônica<sup>(1)</sup>  $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 \sin(\omega_n t)$ , Eq. (VII.29) pode ser reescrita

$$(\underline{k} - \omega^2 \underline{M}) \underline{x} = 0 \quad (\text{VII.30})$$

para a solução não trivial

$$\det. (\underline{k} - \omega^2 \underline{M}) = 0 \quad (\text{VII.31})$$

que conduz a um polinômio de grau "n" em  $\omega^2$

$$a_n (\omega^2)^n + a_{n-1} (\omega^2)^{n-1} + \dots + a_1 (\omega^2) + a_0 = 0 \quad (\text{VII.32})$$

cuja a solução fornece as "n" frequências naturais que estão associadas aos modos de forma (forma defletida).

Na prática muito raramente se necessita encontrar todas as frequências para um SUGL<sup>(2)</sup>, de forma que alguns ritmos especiais são usados para encontrar as primeiras cinco, ou todas as frequências que ocorrem dentro de uma faixa de frequências especificadas; uma vez que a utilização de (VII.31) se torna inadequada com o crescimento de "n". Uma destas técnicas consiste reduzir a Eq. (VII.30) a forma:

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{x} = 0 \quad (\text{VII.33})$$

onde

$\underline{I}$  = matriz unitária

$\underline{x} \underline{M}^{-1}$  na equação (VII.30) vem:

$$(\underline{M}^{-1} \underline{k} - \omega^2 \underline{I}) \underline{x} = 0 \quad (\text{VII.34})$$

(1) Todos os pontos descrevem movimentos harmônicos e em fase (todos os pontos tem o máximo deslocamento ao mesmo tempo)

(2) Para n com mais de 1 G.L. usam-se métodos diferentes do apresentado (numéricos)

que é comparada com a anterior quando

$$\underline{A} = \underline{M}^{-1} \underline{k} \quad \text{e} \quad \lambda = \omega^2 \quad (\text{VII.35})$$

$\underline{M}$  e  $\underline{k}$  são simétricas,  $\underline{A} = (\underline{M}^{-1} \underline{k})$  é uma matriz assimétrica, por isso, este procedimento não é o mais indicado. Para superar esta dificuldade, através de uma mudança de coordenadas,  $\underline{y}$ , pode-se obter uma equação da forma da (VII.32) onde  $\underline{A}$  é simétrica ou seja:

$$\underline{y} = \underline{M}^{1/2} \underline{x} \quad \text{ou} \quad \underline{x} = \underline{M}^{-1/2} \underline{y} \quad (\text{VII.36})$$

pré-multiplicando por  $(\underline{M}^{-1/2})$  e fazendo a substituição em  $\underline{x}$  na equação (VII-31), tem-se:

$$(\underline{M}^{-1/2} \underline{k} \underline{M}^{1/2} - \omega^2 \underline{M}^{-1/2} \underline{M} \underline{M}^{1/2}) \underline{y} = 0 \quad (\text{VII.37})$$

ou

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{y} = \underline{0} \quad (\text{VII.38})$$

onde

$$\underline{M}^{-1/2} \underline{k} \underline{M}^{1/2} = \underline{A} \quad \text{é simétrica} \quad \text{e} \quad \lambda = \omega^2 \quad (\text{VII.39})$$

A partir daí, são inúmeros os processos de solução do problema típico de autovalor (Eq. VII.38), onde os valores de  $\lambda$  são denominados autovalores, e estão associados aos vetores  $\underline{y}$  (autovetores).

Os auto-valores estão relacionadas as frequências naturais (Eq. VII.39) e os autovetores ( $\underline{y}$ ) aos modos de forma; porém estes estão distorcidos pela transformação de coordenadas, e uma retro transformação conduz as coordenadas originais (Eq. VII.36).



### VII.1-3.3 - Método da Superposição Modal

Seja a equação do movimento:

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{C} \dot{\underline{x}} + \underline{k} \underline{x} = \underline{F}(t) \quad (\text{VII.40})$$

Que representa um sistema simultâneo de equações diferenciais. É possível através de uma mudança de coordenadas desacoplar estas equações, tornando-as num sistema de "n" equações diferenciais ordinárias independentes; e cada uma poderá ser trabalhada individualmente, como se fosse um sistema simples com 1 GL.

O desacoplamento destas equações é feito: calculando-se primeiro os autovalores e autovetores da equação reduzida  $\underline{M} \ddot{\underline{x}} + \underline{k} \underline{x} = 0$ , por algum método qualquer, tais como os apresentados na seção anterior. Com os "n" autovetores, monta-se uma matriz  $\underline{\Phi}$  (n x n). Efetuando-se a transformação  $\underline{x} = \underline{\Phi} \cdot \underline{y}$  e pré-multiplicando (VII.40) por  $\underline{\Phi}^T$ , chega-se:

$$\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} \ddot{\underline{y}} + \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} \dot{\underline{y}} + \underline{\Phi}^T \underline{k} \underline{\Phi} \underline{y} = \underline{\Phi}^T \underline{F}(t) \quad (\text{VII.41})$$

Considerando que a matriz de amortecimento  $\underline{C}$  seja bem comportada, ou seja, atenda certas condições ( $\underline{C} = a_0 \underline{M} + a_1 \underline{k}$ . combinação linear da matriz de massa e de rigidez), será possível manter as condições de ortogonalidade para  $\underline{C}$ , onde  $a_0$  e  $a_1$  são constantes dependentes das frequências naturais, e obtidas pelo processo da matriz de amortecimento de Rayleight [31], através da fixação da percentagem de amortecimento sobre dois modos, em que se tem muito controle. Desta forma se consegue o desacoplamento. Na verdade, as coordenadas,  $\underline{y}$ , são os modos normais e representam a contribuição do movimento global para cada modo independente da estrutura. De fato, a operação de desacoplagem é possível graças a propriedade de ortogonalidade dos modos normais; e também que a energia contida em um modo é independente da energia contida em um outro modo [41].

A equação de ordem "i" de (VII.41) tem a forma:

$$\underline{M}_i^* \ddot{\underline{Y}}_i + \underline{C}_i^* \dot{\underline{Y}}_i + \underline{K}_i^* \underline{Y}_i = \underline{\Phi}_{i1} \underline{F}_1(t) + \underline{\Phi}_{i2} \underline{F}_2(t) \dots \underline{\Phi}_{in} \underline{F}_n(t) \quad (\text{VII.42})$$

que é idêntica a equação para SUGL; com exceção de que devido ao desacoplamento a excitação consistirá agora numa soma de "n" forças de excitação.

Encontrada a resposta em coordenadas modais,  $\underline{Y}$ , se processa o retorno as coordenadas originais ( $\underline{x}$ ) através da equação

$$\underline{x} = \underline{\Phi} \underline{Y} \quad (\text{VII.43})$$

O método da superposição pode ser sumarizado <sup>31</sup>:

a) Monta-se a equação do movimento

$$\underline{m} \ddot{\underline{x}} + \underline{c} \dot{\underline{x}} + \underline{k} \underline{x} = \underline{F}(t)$$

conhecidas  $\underline{m}$ ,  $\underline{k}$ ,  $\underline{c}$  e  $\underline{F}(t)$

b) Com  $(\underline{k} - \omega^2 \underline{m}) \hat{\underline{x}} = 0$  encontra-se as frequências naturais  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \rightarrow \hat{\underline{x}}_1, \hat{\underline{x}}_2, \dots, \hat{\underline{x}}_n \rightarrow \underline{\Phi}_1, \underline{\Phi}_2, \underline{\Phi}_3, \dots, \underline{\Phi}_n$

c) Obtem-se as matrizes generalizadas

$$\underline{M}_i^* = \underline{\Phi}_i^T \underline{M} \underline{\Phi}_i; \quad \underline{K}_i^* = \underline{\Phi}_i^T \underline{K} \underline{\Phi}_i = \underline{M}_i \omega_i^2; \quad \underline{F}_i^* = \underline{\Phi}_i^T \underline{F}$$

d) Equações modais com 1 GL, com ou sem amortecimento (Equação de movimento desacopladas)

$$\ddot{\underline{Y}}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{\underline{Y}}_i + \omega_i^2 \underline{Y}_i = \underline{F}_i^* / \underline{M}_i^*$$

e) A integração da equação anterior conduz a equação de Duhamel

$$Y_i = \frac{1}{M_i \omega_{Di}} \int_0^t F_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{Di} (t-\tau) F_i(\tau) d\tau$$

onde

$\omega_D$  = frequência da vibração amortecida

- f) Vibrações modais livres: se a equação de (d) for para vibrações modais livres com c.i.  $Y_i(0)$ ; e  $\dot{Y}_i(0)$  dadas, tem-se:

$$Y_i = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[ \frac{\dot{Y}_i(0) + Y_i(0) \xi_i \omega_i}{\omega_{Di}} \sin \omega_{Di} t + Y_i(0) \cos \omega_{Di} t \right]$$

Isto pode ser obtido da especificação inicial do deslocamento  $x(0)$  e a velocidade  $\dot{x}(0)$  expressa nas coordenadas geométricas iniciais, como o seguinte, para cada componente modal.

$$Y_i(0) = \Phi_i^T \underline{m} x(0) | M_i^* \quad \text{e} \quad \dot{Y}_i(0) = \Phi_i^T \underline{m} \dot{x}(0) | M_i^*$$

- g) Retorno às coordenadas originais  $\underline{x} = \underline{\Phi} \underline{Y}$

- h) Cálculo das forças resistentes ( $f_R$ )

$$\underline{f}_R = \underline{K} \underline{x} = \underline{K} \underline{\Phi} \underline{Y}$$

ou

$$\underline{f}_R = \underline{m} \underline{\Phi} \left[ \omega_i^2 Y_i \right]$$

VII.1-4 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

A equação do movimento para a estrutura mostrada na Figura (VII-3), é obtida através das forças de onda sobre uma estrutura elástica.

$$M\ddot{x} + 2m\xi\omega_2\dot{x} + Kx = \rho A_s C_m \dot{U} - \rho A_s C_l \ddot{x} + \frac{1}{2} \rho |U - \dot{x}| x (U - \dot{x}) D C_D \quad (\text{VII-44})$$

onde

$M$  = massa por unidade de comp. da estrutura

$\xi$  = coeficiente de amortecimento da estrutura (pode ser medido pelo decaimento da vibração livre no vácuo)

A Equação (VII.44) é de um oscilador não linear, e em geral não tem uma solução fechada, a não linearidade reside no termo de arraste. Todavia, se  $u \gg \dot{x}$ , este termo pode ser linearizado [12]:

$$|U - \dot{x}| (U - \dot{x}) = |U - \dot{x}| U - |U - \dot{x}| \dot{x} \approx |U| U \quad (\text{VII.45})$$

em que:

$$|U - \dot{x}| U \approx |U| U \quad \text{e} \quad |U - \dot{x}| \dot{x} \approx 0, \quad u \gg \dot{x}$$

VII.1-5 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO MOVIMENTO LINEARIZADA

A Equação (VII.44) para movimentos muito pequenos da estrutura (linearizada), se reduz:

$$M\ddot{x} + 2m\xi_N\omega_N\dot{x} + Kx = \rho A C_M \dot{U} + \frac{1}{2} \rho |U| U D C_D \quad (\text{VII.46})$$

onde:

$M$  = massa efetiva da estrutura por unidade de comprimento, incluindo a massa adicional e o fluido arrastado

$$M = m_e + \rho A_s C_l \quad (\text{VII.47})$$

a freqüência natural ( $\omega_n$ ) e o fator de amortecimento da estrutura são diminuídos de alguma coisa pela massa do fluido arrastada pela estrutura:

$$\frac{\omega_n}{\omega_o} = \frac{\xi_N}{\xi_o} = \frac{1}{(1 + \rho A_s C_l / M_e)^{1/2}} \quad (\text{VII.48})$$

onde

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{M_e}} \quad (\text{freqüência da estrutura medida no vácuo})$$

$$\xi_o = \text{fator de amortecimento no vácuo}$$

$$\omega_N = \text{freqüência natural da estrutura imersa no fluido}$$

A equação do movimento (VII.46) é linear no deslocamento  $x$  e pode ser resolvida expandindo-se o termo de arraste, deslocamentos em série de Fourier.

#### VII.1-5.1 - Movimento Oscilante da Onda

Para uma onda senoidal em águas profundas, a velocidade do fluxo oscilante é dada por:

$$U = -A \omega e^{ky} \sin(kx - \omega t) = U_m \sin \omega t \quad (\text{VII.49})$$

onde:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad \omega = \text{freqüência circular da onda}$$

o termo de amortecimento é expandido em série de Fourier:

$$|U|U = U_m^2 \left| \sin \omega t \right| \sin \omega t = U_m^2 \sum_{\ell=1,3,5 \dots}^{\infty} c_{\ell} \sin \ell \omega t \quad (\text{VII.50})$$

onde os coeficientes são:

$$c_{\ell} = 2 \left[ 1 - \ell^2 / (\ell^2 - 4) \right] / (\pi \ell) \quad (\text{VII. 50a})$$

que calculados se tornam:

$$c_1 = 0.8488$$

$$c_2 = -0.1698$$

$$c_3 = -0.0242$$

analogamente, o deslocamento  $(x)$  é expandido em série

$$x = \sum_{\ell=1}^{\infty} (a_{\ell} \sin K \omega t + b_{\ell} \cos K \omega t) \quad (\text{VII.51})$$

Substituindo as Eqs. (VII.49, 50, 51) em (VII.46), e comparando os coeficientes de Fourier em cada termo da Equação, determina-se as constantes  $a_{\ell}$  e  $b_{\ell}$ . A solução  $^{12}$  em tão será:

$$\begin{aligned} \frac{x}{D} = & c_m \left( \frac{\omega}{\omega_N} \right) \left( \frac{\rho D^2}{m} \right) \left( \frac{A_s}{D^2} \right) \left( \frac{U_m}{\omega_N D} \right) \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_N} \right)^2 \right] \cos \omega t + \right. \\ & \left. + 2 \xi_N \frac{\omega}{\omega_N} \sin \omega t \right\} Q_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho D^2}{m} \right) \left( \frac{U_m}{N D} \right)^2 c_D x \\ & \times \sum_{\ell=1,3,5}^{\infty} c_{\ell} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{\ell \omega}{\omega_N} \right)^2 \right] \sin \ell \omega t - 2 \xi_N \frac{\omega}{\omega_N} \cos \ell \omega t \right\} Q_{\ell} \quad (\text{VII.52}) \end{aligned}$$

onde

$$Q_1 = \left\{ \left[ 1 - \left( \ell \omega / \omega_N \right)^2 \right]^2 + \left( 2 \ell \xi_N \omega / \omega_N \right)^2 \right\}^{-1} \quad (\text{VII.53})$$

A resposta dinâmica típica para este modelo de es

estrutura é dada na Figura (VII.4), como uma função da relação de frequência da onda e da estrutura. A resposta da estrutura é expressa pela relação entre a resposta dinâmica, é a deformação produzida pela máxima carga do fluido aplicada estaticamente. A análise das zonas de comportamento da resposta em função da relação de frequências já foi discutida na seção (VII.1-2.2).

#### VII.1-6 - PROPRIEDADES FÍSICAS PARA A ANÁLISE DINÂMICA

As propriedades físicas da estrutura devem ser conhecidas de modo que um modelo analítico idealizado para ser construído e dinamicamente analisado.

Em essência, isso envolve calcular para a estrutura os coeficientes individuais do lado esquerdo da equação do movimento.

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + K x = F(t)$$

Isso requer o conhecimento da massa, da rigidez e do amortecimento da estrutura. O termo do lado direito da equação foi objeto de estudo nos Capítulos II e V, para ondas e cargas induzida por fluxo respectivamente.

Quando tais dados físicos forem determinados, as técnicas analíticas descritas neste Capítulo podem ser aplicadas para determinar a resposta dinâmica da estrutura.

#### VII.1-5.1 - Massa

A primeira etapa no cálculo da massa de uma estrutura é obter detalhes da massa estrutural e sua distribuição, incluindo o meio circundante. Em geral, isso é uma tarefa fácil. Deve ser notado que é melhor errar em superestimar a massa, uma vez que esta conduzirá a uma frequência natural mais baixa da que provavelmente ocorrerá.

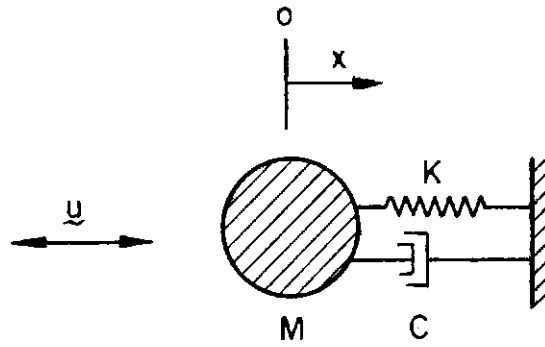


FIG. VII.3 - Ação do fluxo num sistema com 1 G.L.

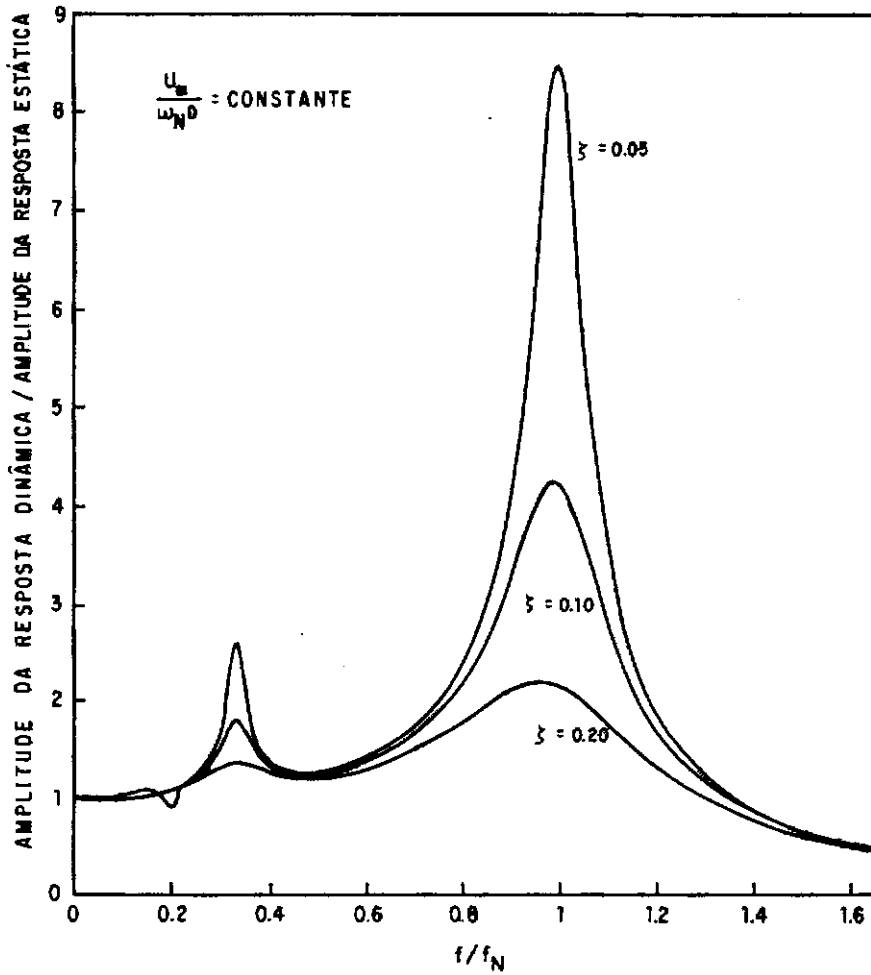


FIG. VII.4 - Resposta dinâmica típica para uma estrutura para um fluxo oscilatório ( $f$  = frequência da onda ;  $f_N$  = frequência natural ).



Quanto ao comportamento de estruturas no mar, as adições importantes à massa estrutural normal devem ser consideradas. Há uma massa circundante de água, que se move com os membros estruturais submersos ou parcialmente submersos. Essa massa circundante é chamada de *massa adicional*.

O aumento em massa feito por cracas, fará com que a massa varie durante a vida da estrutura e este fato deve ser considerado.

#### - Massa adicional

Para certas estruturas que estão submersas ou parcialmente submersas sofrendo oscilações, uma certa quantidade da água circundante se move com a estrutura. Essa massa de água deve ser incluída quando se considerar a dinâmica da estrutura. Deve ser lembrado que a água adicional é externa à estrutura, e ainda pode existir uma água contida dentro do vazio da estrutura, que obviamente se moverá com a estrutura. Assim, por exemplo, um membro ôco que contém água, tem uma massa efetiva dada por

( i ) a massa do membro

( ii ) a massa de água contida dentro do membro

(iii) a massa da água circundante

A determinação dos ítems (i) e (ii) não apresentam problema, mas a água circundante é mais difícil calcular e é altamente dependente na forma geométrica do corpo submerso. Tabela 1 do Apêndice II apresenta os valores para serem usados em formas que ocorrem mais freqüentemente.

#### - Alterações de Massa Causadas por Cracas Marinhas

Um crescimento de cracas numa estrutura produz um aumento de massa sem uma mudança significativa da rigidez e isso causa uma redução na freqüência natural. Uma indicação dos va-

lores destes aumentos de massa associados com tipos particulares de organismos marinhos devem ser procurados.

O aumento das dimensões geométricas feito por cracas produz um aumento correspondente na massa adicional de água e esse efeito também precisa ser considerado.

#### - Amortecimento

Dos parâmetros que afetam a resposta dinâmica, o amortecimento estrutural é o mais difícil de ser determinado. Não pode ser calculado analiticamente e normalmente deve-se lançar mão da comparação com uma estrutura proposta com os valores medidos em estruturas existentes. No entanto, o amortecimento estrutural não é verdadeiramente viscoso, mas é conveniente nesta forma para facilitar análise. Esta representação conduz a erros, mas que são pequenos, quando comparados com a taxa total do valor do amortecimento.

#### - Amortecimento Hidrodinâmico

Em todas as estruturas imersas n'água há a adição do amortecimento proveniente da água. No caso de movimento induzido pela onda, este é considerado parte de uma função forçada e se a estrutura se move na freqüência da onda, o amortecimento viscoso é negligenciado.

#### - Medidas de Propriedades Dinâmicas Estruturais

Desde que a predição do amortecimento estrutural depende das medidas tomadas em estruturas existentes, as dificuldades associadas com essas medidas são evidentes. Muitas vezes é possível obter resultados em outras estruturas que são similares às propostas.

Basicamente existem tres aproximações à excitação

de estruturas (Wootton, 1972, Ruhl, 1976):

- ( i )    à estrutura é aplicada uma carga estática que é então instantaneamente retirada e a queda de oscilação resultante é estudada. Isso requer uma outra estrutura próxima para a nação. Alternativamente o movimento inicial pode ser produzido com a força senoidal.
- ( ii )    A segunda aproximação é oscilar a estrutura continuamente numa frequência natural com uma força senoidal de magnitude conhecida e medir sua amplitude. Isso dá o fator de amplificação dinâmica.
- ( iii )    A estrutura pode ser excitada por uma força randômica que contém componentes de energia da frequência natural ou frequências da estrutura. Um estudo do espectro da resposta dada e da amplificação conduz ao conhecimento do amortecimento.

## APLICAÇÕES E RESULTADOS

### PARTE 2

#### VII.2.1 - INTRODUÇÃO

Dados os conteúdos apresentados nos Capítulos anteriores, que procuraram de uma certa forma, abordar senão todos, pelo menos os mais importantes aspectos relativos ao comportamento de estruturas num meio fluido; nada mais justo agora, que utilizar destes conhecimentos, para aplicações de caráter real, cujos os resultados serão sem dúvidas interessantes.

Das estruturas no mar hoje existentes: estruturas articuladas, móveis, flutuantes, semi flutuantes, plataformas tipo jaqueta ou gravidade, estruturas tipo bôia, etc., escolheu-se um conjunto de estruturas representativas da classe de estruturas localizadas no mar, e que estivessem dentro das regiões de interesse (inércia e difração), que por sua vez, se constituiu no objeto destes estudos (estruturas tipo gravidade); uma vez que, às plataformas tipo gravidade, em quase nada tem sido estudado em nosso país, e muito menos, tem sido feito gestões, no sentido do seu uso num futuro próximo.

As estruturas escolhidas para análise são a saber:

- (a) torre com inércia constante
- (b) torre com seção variável
- (c) ilha artificial
- (d) plataforma "off-shore" tipo gravidade.

todas construídas em concreto armado.

Sabe-se que das solicitações que uma estrutura no mar está sujeita, às forças dinâmicas preponderantes, são as

que resultam das ações das ondas. Estas solicitações são obtidas pelos dois procedimentos apresentados neste trabalho (E.M. e T. D.), e para tal foi desenvolvido um programa de computador, que apesar de não possuir uma unidade lógica operacional implementada, possibilita o cálculo do campo cinemático da onda, das pressões, das elevações da superfície livre, e as forças e momentos de qualquer natureza, para uma estrutura cilíndrica vertical, com inércia constante, ou seção variando lentamente. Por sua vez, para a análise dinâmica se lança mão do Lorane-Dyna<sup>99</sup>, que oferece recursos excelentes para este tipo de análise.

Finalmente esta 2.<sup>a</sup> parte é finalizada com a plotagem dos resultados obtidos nestas aplicações.

## VII.2-2 - IDEALIZAÇÃO ESTRUTURAL

A modelagem da estrutura se constitui numa etapa importante, pois dela dependerá o quão realístico se poderá representar o problema físico. O modelo estrutural visa em última análise despojar todas as qualidades secundárias, com que se reveste o problema; e mantida suas qualidades essenciais, simplificar a questão.

A Figura VII.5 mostra a idealização estrutural para todas as aplicações deste trabalho.

Começando pelo mais simples, a estrutura é tratada como um bloco rígido. Nota-se que este modelo não pode fornecer informações sobre a resposta da estrutura, mas pode dar informações sobre a resposta das forças dinâmicas transmitidas as fundações. Para uma estrutura como um tanque, isto pode representar um modelo dinâmico razoável. Um modelo mais realístico é obtido, considerando-se a estrutura como uma viga em balanço com várias rigidez. A massa da estrutura é distribuída em alguns pontos nodais (5). Cada um destes possui 3 G.L. (2 translações e uma rotação). Apesar deste modelo fornecer uma representação realística da rigidez, massa e das cargas; proporção

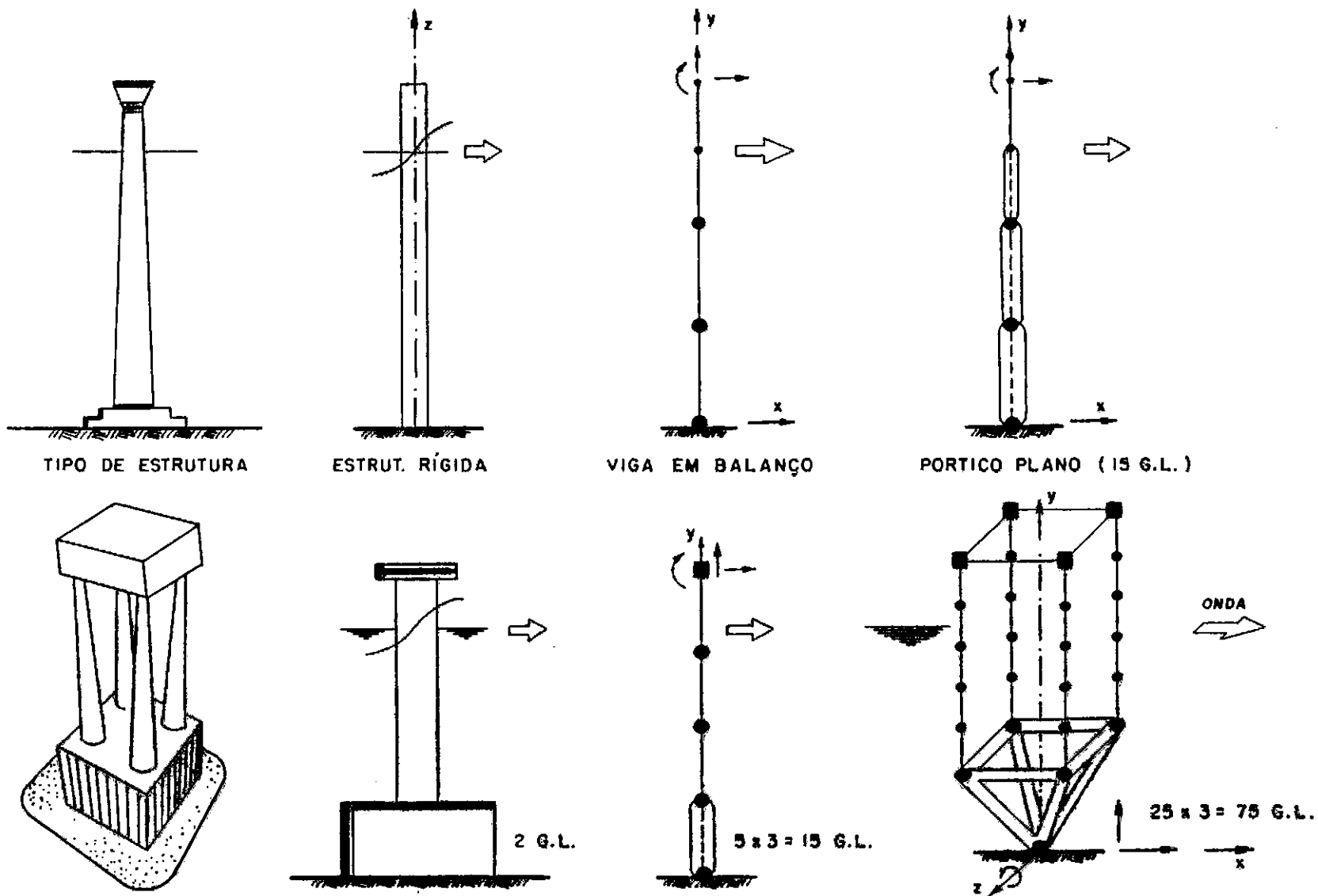


FIG.VII.5 - Idealização estrutural (modelos planos).

nando uma predição razoável do comportamento dinâmico total (período de vibração natural forças nos apoios; é ainda muito simples. Para uma representação mais aprimorada, a Figura VII.5 ainda apresenta a estrutura discretizada como um pórtico espacial. Como o "Caisson" é muito rígido quando comparado com as torres (pernas), este é modelado por um sistema de vigas horizontais e inclinadas com grandes rigidez, a ponto de reproduzirem este efeito. A meso-estrutura é representada por 4 vigas horizontais de rigidez apropriada. A massa e as cargas são aplicadas nos pontos nodais. Como para todos os casos as ondas são de cristas longas, e incidentes numa única direção, o modelo tridimensional, pode ser restrito aos movimentos num plano ( $Z=0$ ) apenas. Por outro lado, a simetria geométrica e de cargas permite que esta estrutura espacial possa ser estudada como um pórtico plano (3 G.L. por nó). Este modelo apresenta uma distribuição razoável de rigidez e massa, como também uma boa representação da carga, visto que as cargas que produzem os máximos efeitos surge quando um nodo da onda se posiciona no eixo da estrutura.

Apesar do modelo da parte superior da estrutura ser simples, proporciona informações detalhadas da resposta da meso e super-estrutura. Este modelo é capaz de predizer o comportamento dinâmico do sistema como um todo, e nos elementos individuais; com uma boa aproximação para a direção da onda.

Quanto à massa adicional, esta é computada para a estrutura rígida, e considerada constante ao longo de cada elemento. Todavia Chopra [98] mostrou que esta varia com a forma do modo de vibração, não existindo uma única função válida para todos os modos. Este autor também verificou que os efeitos de compressibilidade da água pode ser negligenciado para estes tipos de problemas.

#### - Quanto a Matriz de Amortecimento (Raleygh)

É obtida por uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez.

$$C = a_0 m + a_1 K$$

que por transformação se chega:

$$\xi = \frac{1}{2 \omega_n} \sum_b a_b \omega_n^{2b} \quad \text{com } -\infty < b < +\infty$$

Na prática toma-se valores próximos de zero para  $b$ . (0 e 1).

Considerando-se o controle (Conhecimento) do amortecimento para certos modos (2 por exemplo, 1º e 3º) tem-se:

$$\underline{\xi} = \frac{1}{2} Q \underline{a}$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \end{vmatrix}$$

onde

$$\xi = \% \text{ do } \xi_c$$

logo

$$\underline{a} = 2 Q^{-1} \underline{\xi}$$

em que  $\underline{a}$  é o vetor dos coeficientes da matriz de amortecimento procurada.

### VII.2-3 - TORRE DE CONCRETO COM SEÇÃO CONSTANTE ESTRUTURA = E-I

Seja uma torre de concreto armado e seção vazada constante, com comprimento de 73,2 m e diâmetro 4,10 m, fixa na



extremidade inferior no leito do oceano numa lâmina d'água de 50,4 m (Figura VII.6); sujeita a uma onda de projeto de altura  $H = 10$  m e período  $T = 10$  s.

Sejam os parâmetros e características:

$h = 60,4$ m	$A_s = \text{área da seção} = 7,97$ m <sup>2</sup>
$H = 10$ m	$E = \text{módulo de elasticidade} = 4,1 \times 10^9$ Kg <sub>f</sub> /m <sup>2</sup>
$T = 10$ s	
$L \approx 154$ m	$\rho_e = \text{densidade da estrutura} = 2483$ kg/m <sup>3</sup>
$K = 0,041$ /m	$\rho_a = \text{densidade da água do mar} = 1031$ kg/m <sup>3</sup>
$\omega = 0,628$ rds/s	$I = \text{momento de inércia} = 11,7$ m <sup>4</sup>
$f_\omega = 0,1$ Hz	$K_a = \text{parâmetro de espalhamento} = 0,084$
$\ell = 73,2$ m	$K_h = \text{profundidade relativa} = 2,5$
$u = 0,17$	$e = \text{espessura da parede}$

- coeficiente da matriz de amortecimento:  $a_0 = 3,45$   $a_1 = 0.001561$

% de amortecimento = 5% do amortecedor crítico sobre os mo  
dos que se tem controle.

O cômputo das solicitações extremas nas condições mais desfavoráveis são realizados por um programa de computador elaborado para tal, que fornece os seguintes valores para as forças nodais, devido as características de onda do problema (Vide Figura VII.6).

A análise dinâmica, com a resposta em frequência fornece as propriedades dinâmicas e as respostas próximas, que são sumarizadas na Tabela VII.3 e (Figura VII.7).

São considerado os casos e influências da massa da estrutura ( $m_e$ ) somente; da massa adicional ( $m_{ad}$ ) e da mas

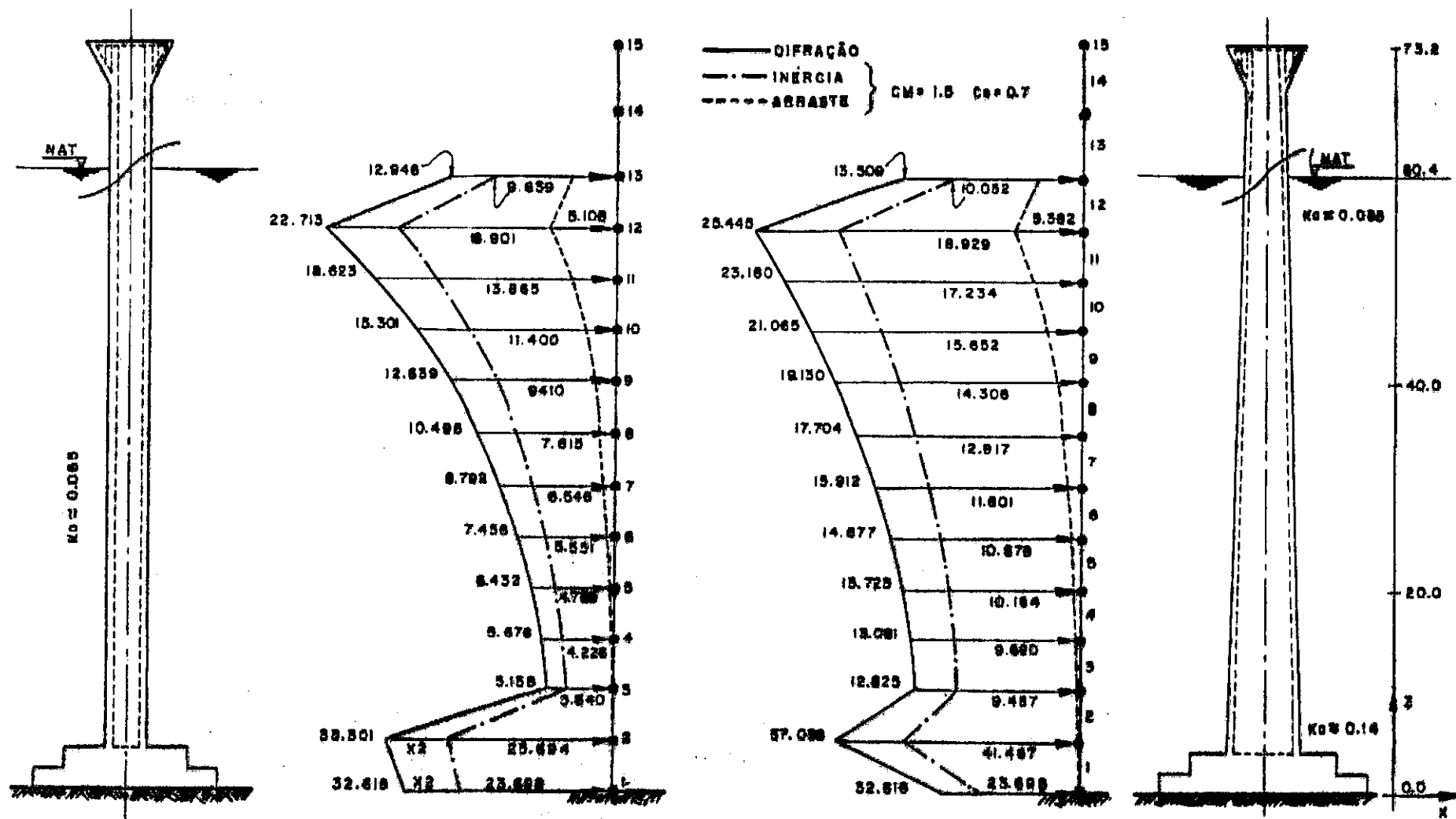


FIG. VII.6 - Forças nodais máximas devido a onda de projeto para as torres modeladas conforme a gravura

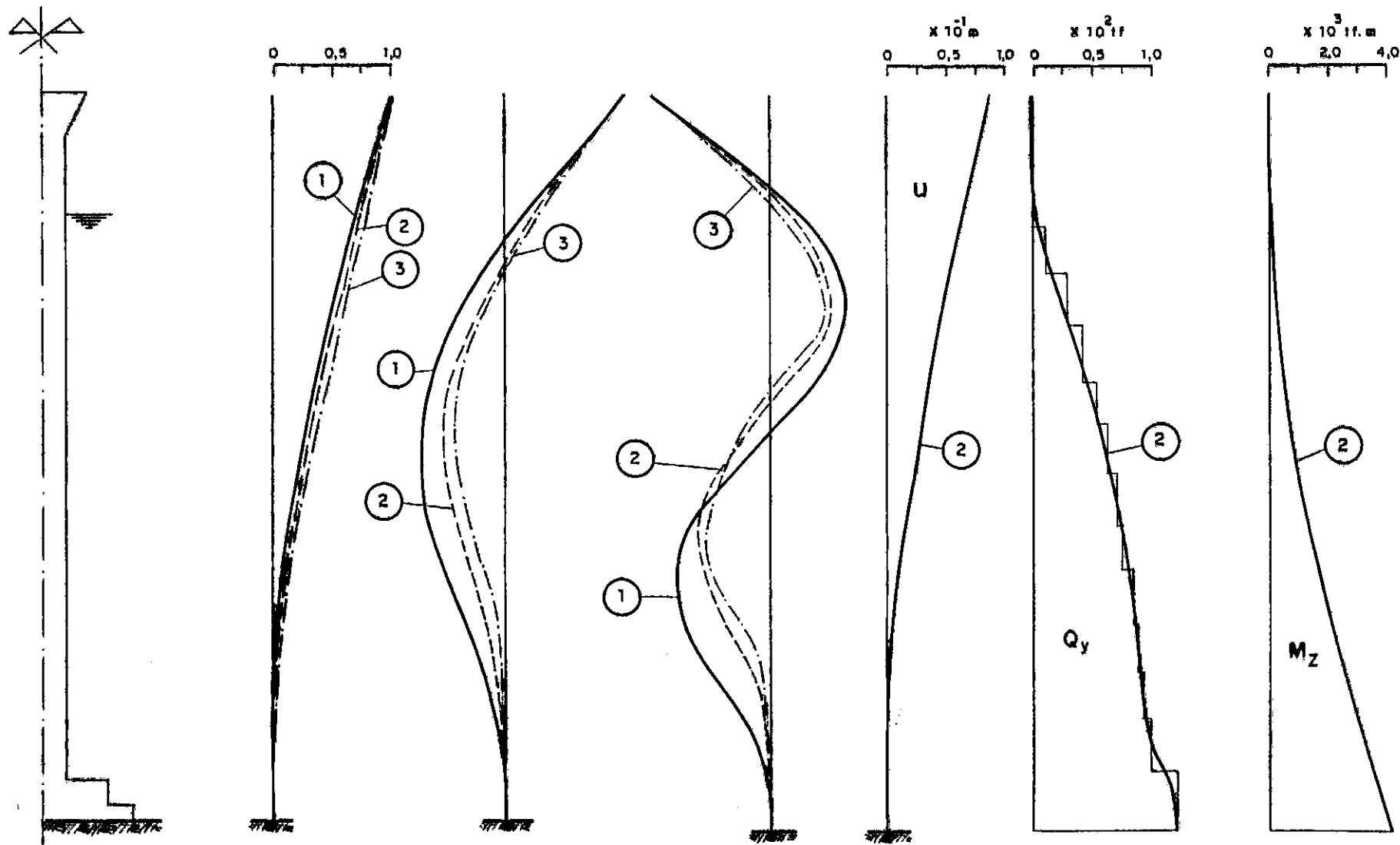


FIG. VII. 7 - Modos de forma e resposta máxima (envoltória) para estrutura E-I

①  $m_e$  , ②  $m_e + m_{ad}$  , ③  $m_e + m_{ad} + m_{ai}$  .

sa de água interna no vazio da estrutura ( $m_{ai}$ ).

#### VII.2-4 TORRE DE CONCRETO COM SEÇÃO VARIÁVEL

##### ESTRUTURA E-II

As características do problema são as mesmas da anterior, somente agora a estrutura tem Inércia variável, possuindo um raio na base de 3,457 m e no topo  $a=1,75$  m (Fig.VII-6).

A Estrutura é discretizada em 15 pontos nodais, com 14 elementos; sendo que ao longo de cada elemento as propriedades são mantidas constantes.

Os Coeficientes da matriz de amortecimento são:

$$a_0 = 0,645 \qquad a_1 = 0,0011943$$

O cômputo das solicitações extremas devido a onda são mostrados na Fig. VII-6 e os resultados da análise dinâmica na tabela (VII.4) e figura (VII.8).

#### VII.2-5 ILHA ARTIFICIAL (Grande Torre Hiperbólica)

##### ESTRUTURA E-III

O problema se enuncia de forma idêntica ao da Estrutura E-I, somente agora com certas características e propriedades diferentes (Fig. VII.9).

$h =$	82,19 m	$Ka(\min) =$	0,7
$H =$	15 m	$Ka(\max) =$	1,2
$T =$	125	$a_{base} =$	41,7 m
$L \approx$	221 m	$a_{topo} =$	24,6 m
$k =$	0.0285/m	$e =$	1,0 m
$\ell =$	100,78 m	$v =$	0.15
$a_0 =$	1.22	$m_{(deck)} =$	
$a_1 =$	0.00138		

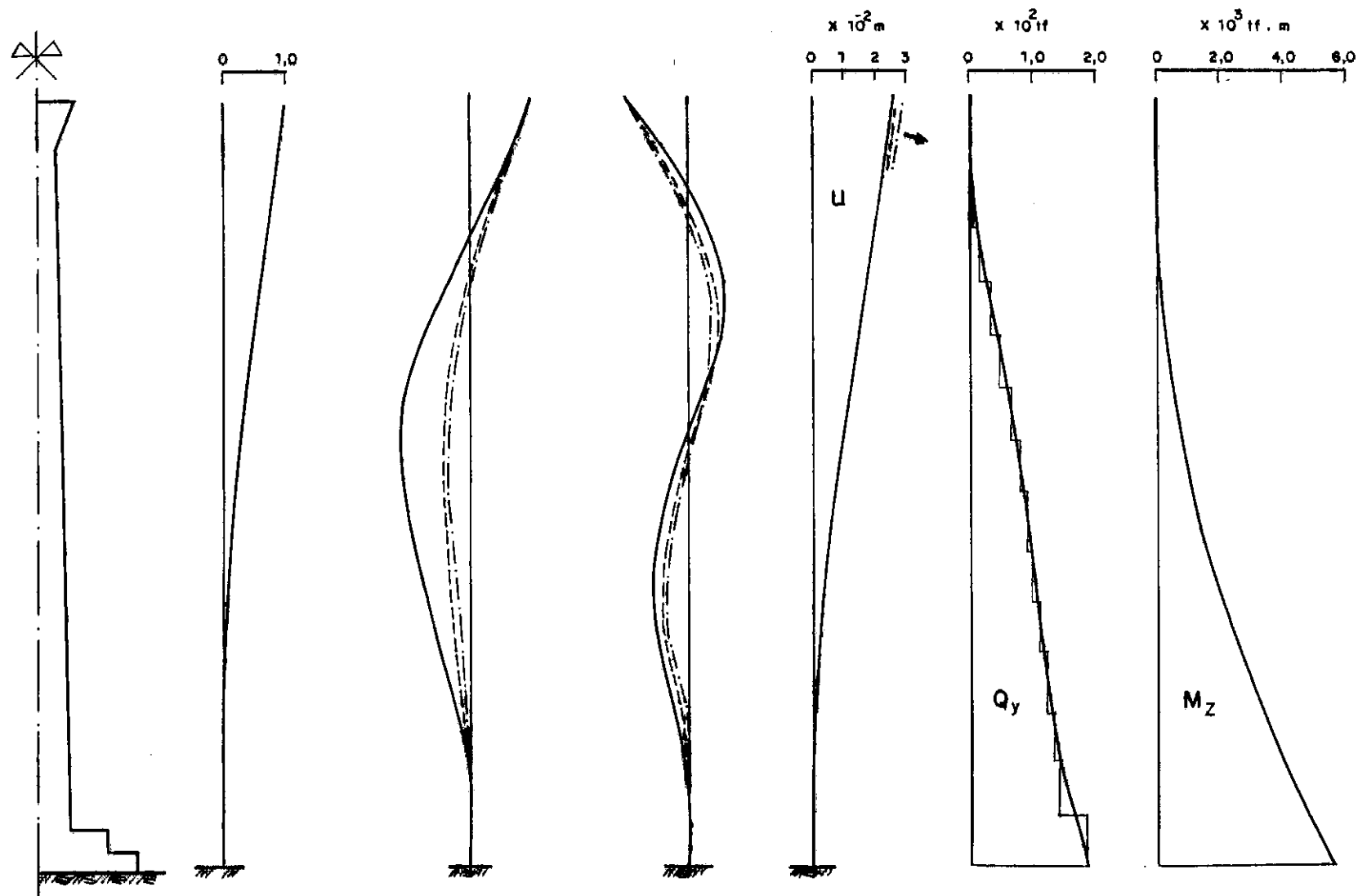


FIG. VII. 8 - Modos de forma, e respostas máximas (envoltória) na estrutura E - II

—  $m_e$ , ---  $m_e + m_{ad}$ , - · -  $m_e + m_{ad} + m_{ai}$ .

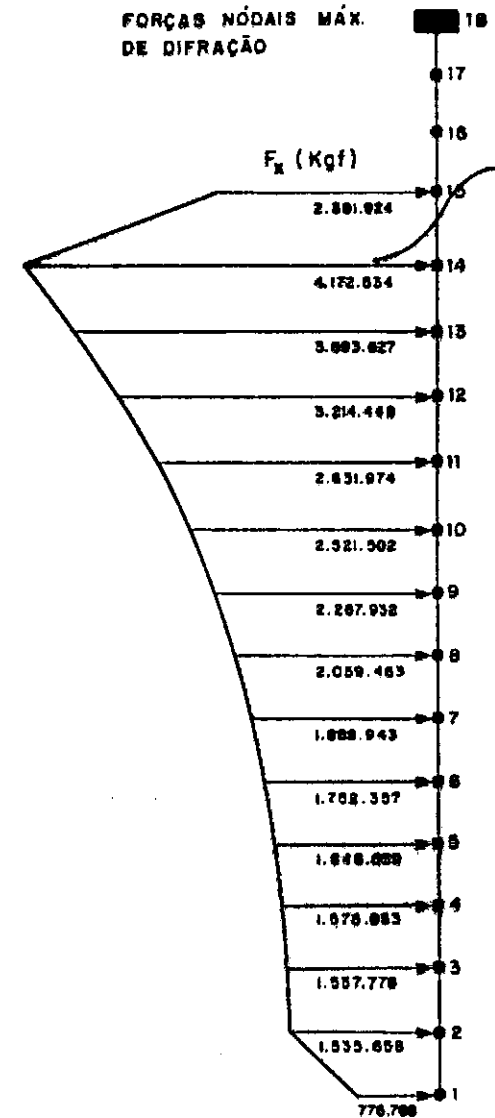
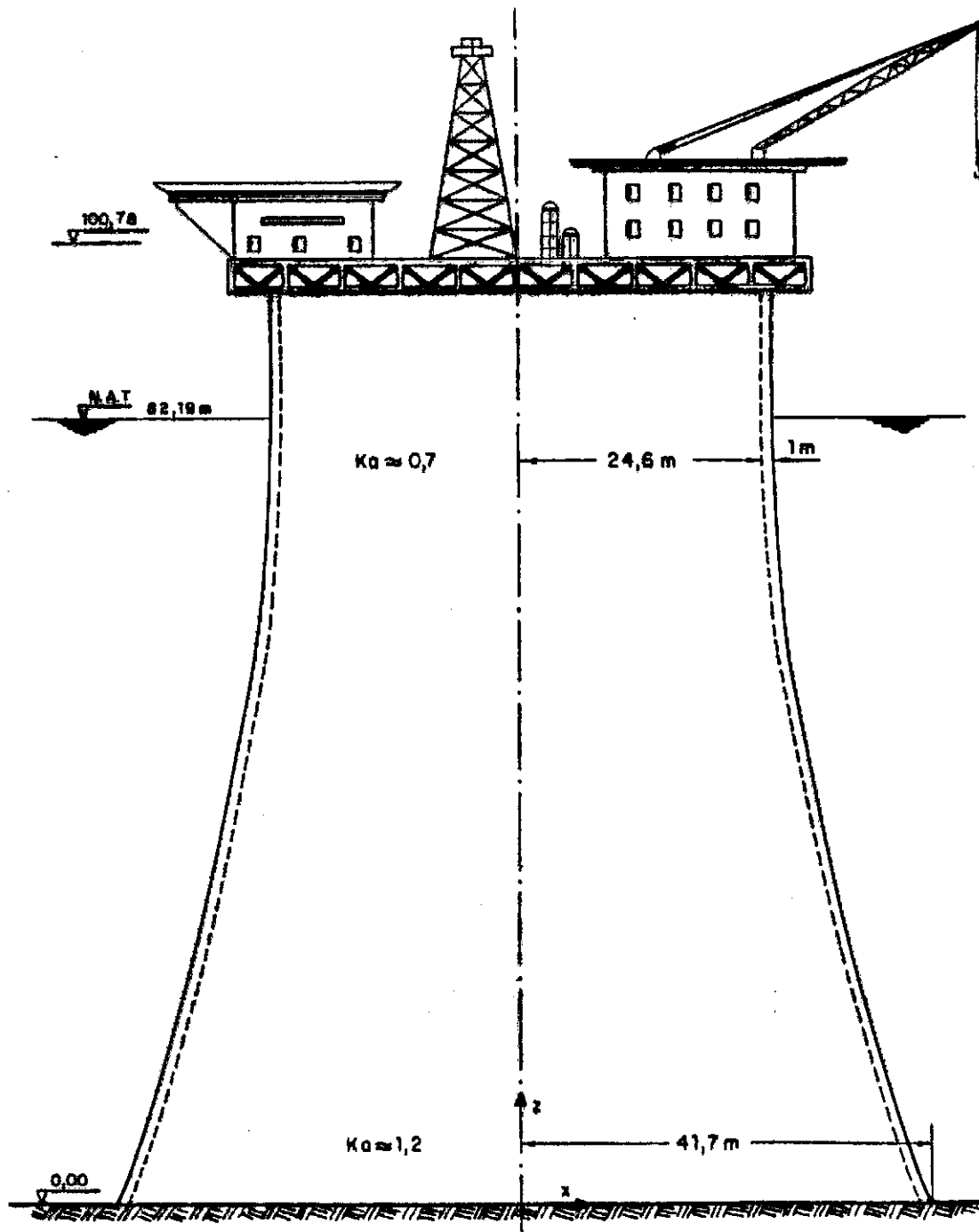


FIG. VII.9 - Modelo de uma estrutura OFFSHORE tipo gravidade (Ilha Artificial).

A equação da curva é dada por:

$$a = A \sqrt{\frac{(Y)^2}{B} + 1}$$

onde  $A = 25,6 \text{ m}$  e  $B = 63,91 \text{ m}$

A Estrutura é discretizada em 18 pontos nodais, e cada elemento é tido como constante em características e propriedades. Ainda que com grandes dimensões (se assemelhando mais a uma casca espessa) a estrutura é tida se comportando como uma viga em balanço.

As Cargas de onda são computados pela Teoria da difração ( $ka > 2\pi/10$ ) para as condições de máximo (Fig. VII.9) e os resultados da análise dinâmica são sumarizados na tabela (VII.5) e figura (VII.10).

## VII.2-6 ESTRUTURA "OFF-SHORE" TIPO GRAVIDADE

ESTRUTURA - E-IV (Fig. VII.11a)

Em função de certas características, fim que se destina e dimensões, encontrados na literatura, se projetou a presente estrutura (Fig. VII.11, a,b,c) cuja as dimensões e outros dados são dados nos cortes vertical e horizontal.

Sejam as características:

$h = 80 \text{ m}$	$a_{(\text{base})} = 5,5 \text{ m}$
$H = 15 \text{ m}$	$a_{(\text{topo})} = 3,25 \text{ m}$
$T = 125$	$\lambda_{(\text{torres})} = 70 \text{ m}$
$L \approx 221 \text{ m}$	$\lambda_{(\text{total})} \approx 105 \text{ m}$

Diâmetro aproximado do "Caisson" = 86 m

Altura do "Caisson" = 35 m

Altura das transições das torres = 70 m

Os resultados das respostas são dadas na tabela (VII.6) e na figura (VII.13).

$\phi_n$  = Diâmetro das Barras

$e_n$  = Espessura das Barras

$$e_{3,4} = 0,75 \text{ m}, \quad e_{5,6} = 0,64 \text{ m}, \quad e_{7,8} = 0,6 \text{ m}, \quad e_{(\text{outros})} = 0,5 \text{ m}$$

Elementos que simulam o "Caisson" (1,2, 15)

$$\phi = 80 \text{ m}, \quad e = 30 \text{ m}$$

$$M_{ad} = S_a \pi a^2 = 5 \, 988 \, 878 \text{ kg/m}$$

#### Cálculo das Cargas

- 1) deck de aço =  $4.794 \times 10^6 \text{ kgf}$
- 2) guindaste =  $0,306 \times 10^6 \text{ kgf}$
- 3) equipamento de perfuração =  $3,06 \times 10^6 \text{ kgf}$
- 4) carga de habitação e  
equipamento de Produção =  $2,04 \times 10^6 \text{ kgf}$
- 5) Bombas e tubulações =  $1,02 \times 10^6 \text{ kgf}$
- 6) módulos =  $1,02 \times 10^6 \text{ kgf}$

TOTAL 12.240 tf

As solicitações devido a onda são computados pelos dois procedimentos: Teoria de difração ("Caisson"), equação de Morison (Torres) (Fig. VII.12), todavia as dimensões da torre e a pequena influência do arraste, permitem que sejam usados, sejam quaisquer um dos dois procedimentos.

As Cargas nodais máximas são botidas após uma análise prévia da posição da onda, que ocasiona as maiores solicitações.



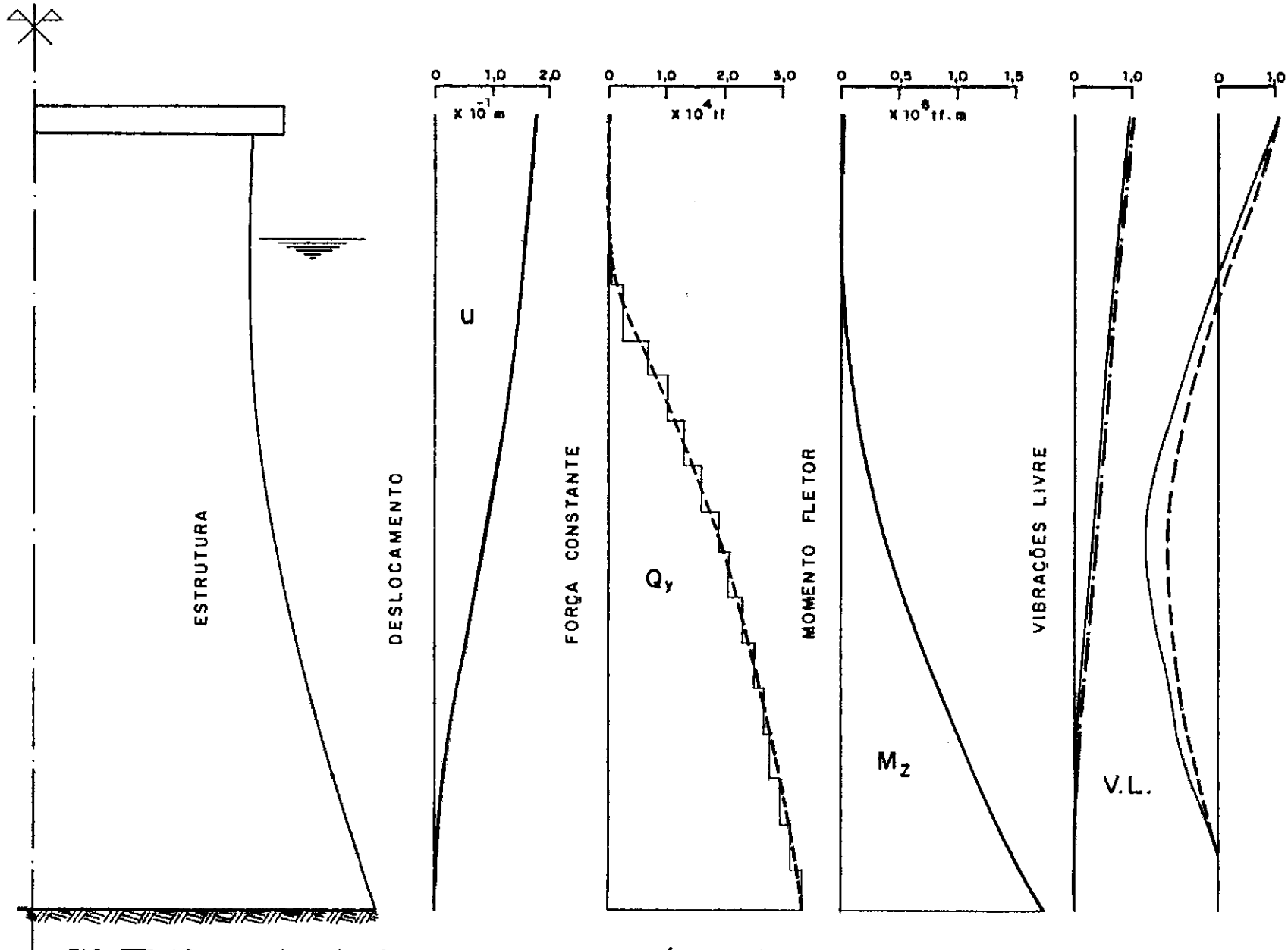
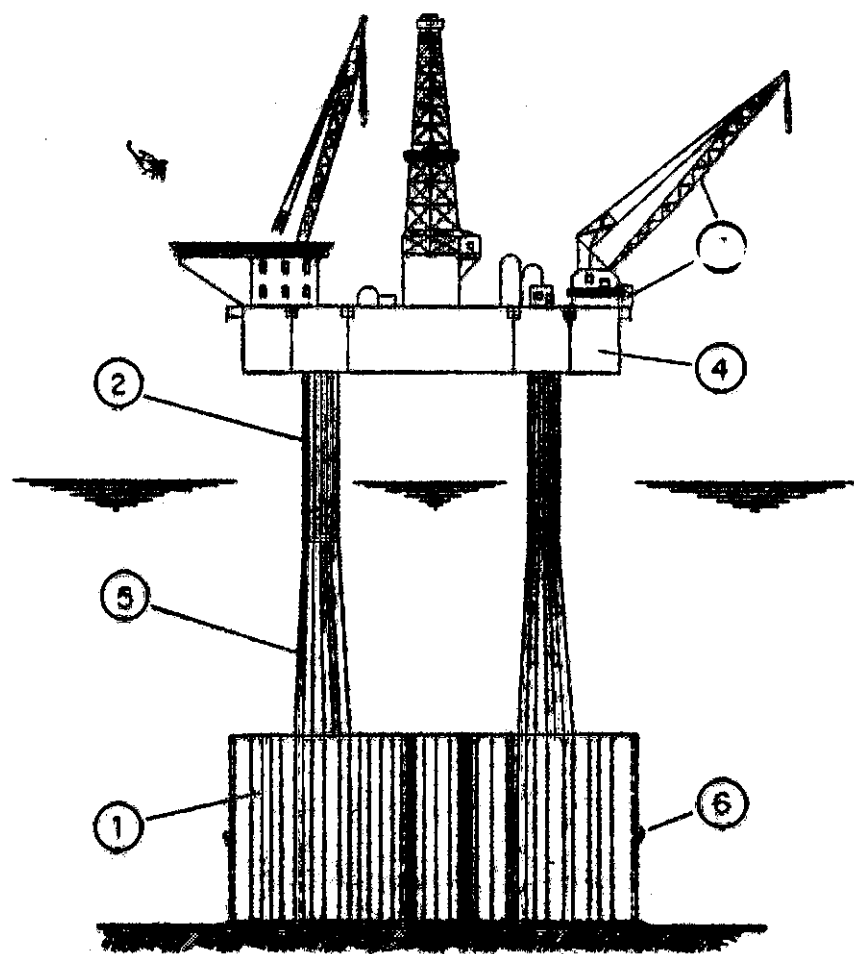


FIG. VII. 10 - Modos de forma, e respostas máximas (envoltória) na estrutura E-III. ( $p^0 m_e$ ).

## ELEVAÇÃO



- ① RESERVATÓRIO DE ESTOCAGEM
- ② SUPORTES DO CONVÉS
- ③ CAMÃRA QUE ENVOLVE O RISER
- ④ CONVÉS
- ⑤ TORRE
- ⑥ AMARRAS PARA O TRANSPORTE
- ⑦ EQUIPAMENTOS
- ⑧ LASTRO SÓLIDO
- ⑨ RISER

FIG.11a - Modelo típico de plataforma "OFF-SHORE" tipo concreto gravidade.

## SECÇÃO VERTICAL

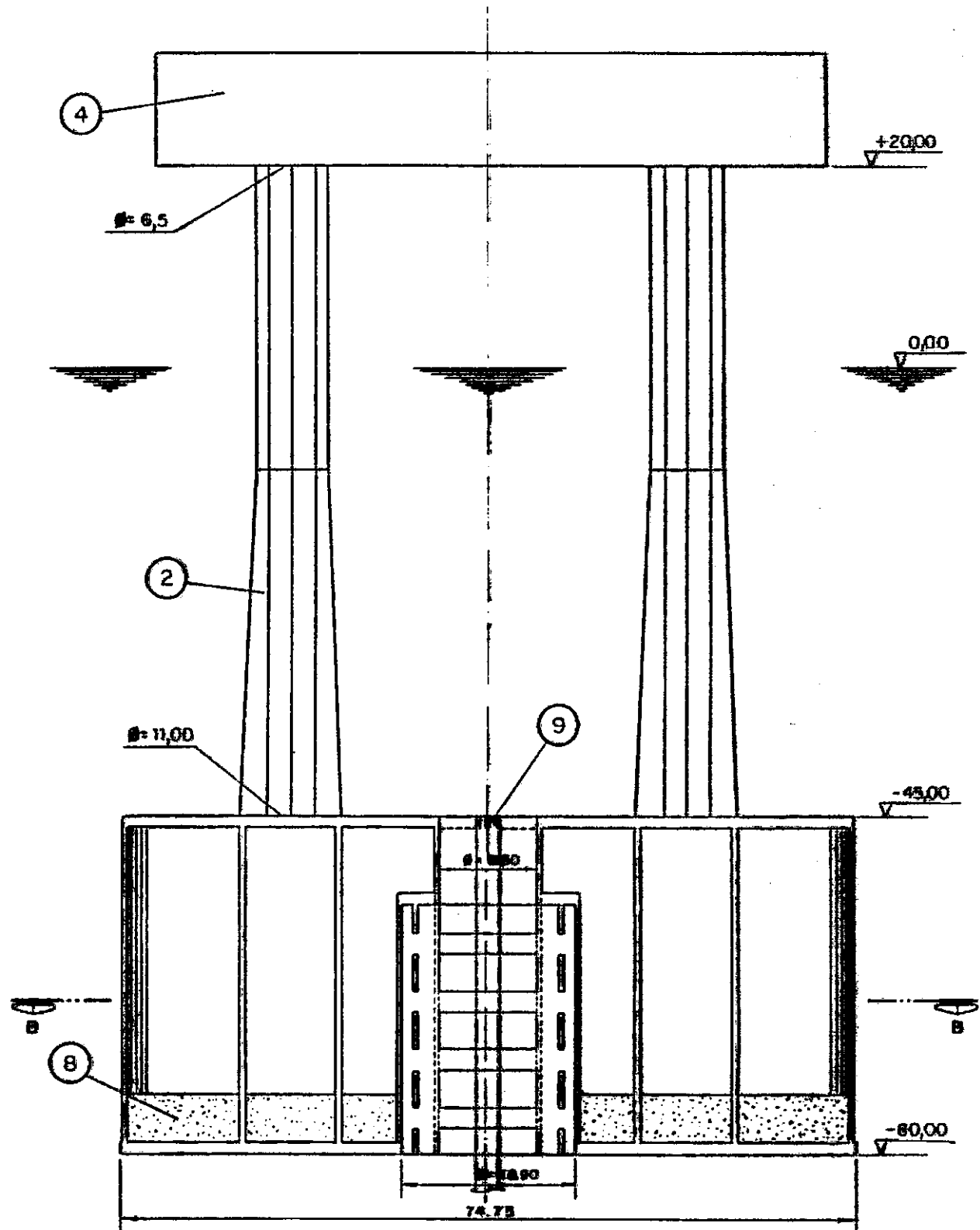


FIG. b

## SECÇÃO HORIZONTAL

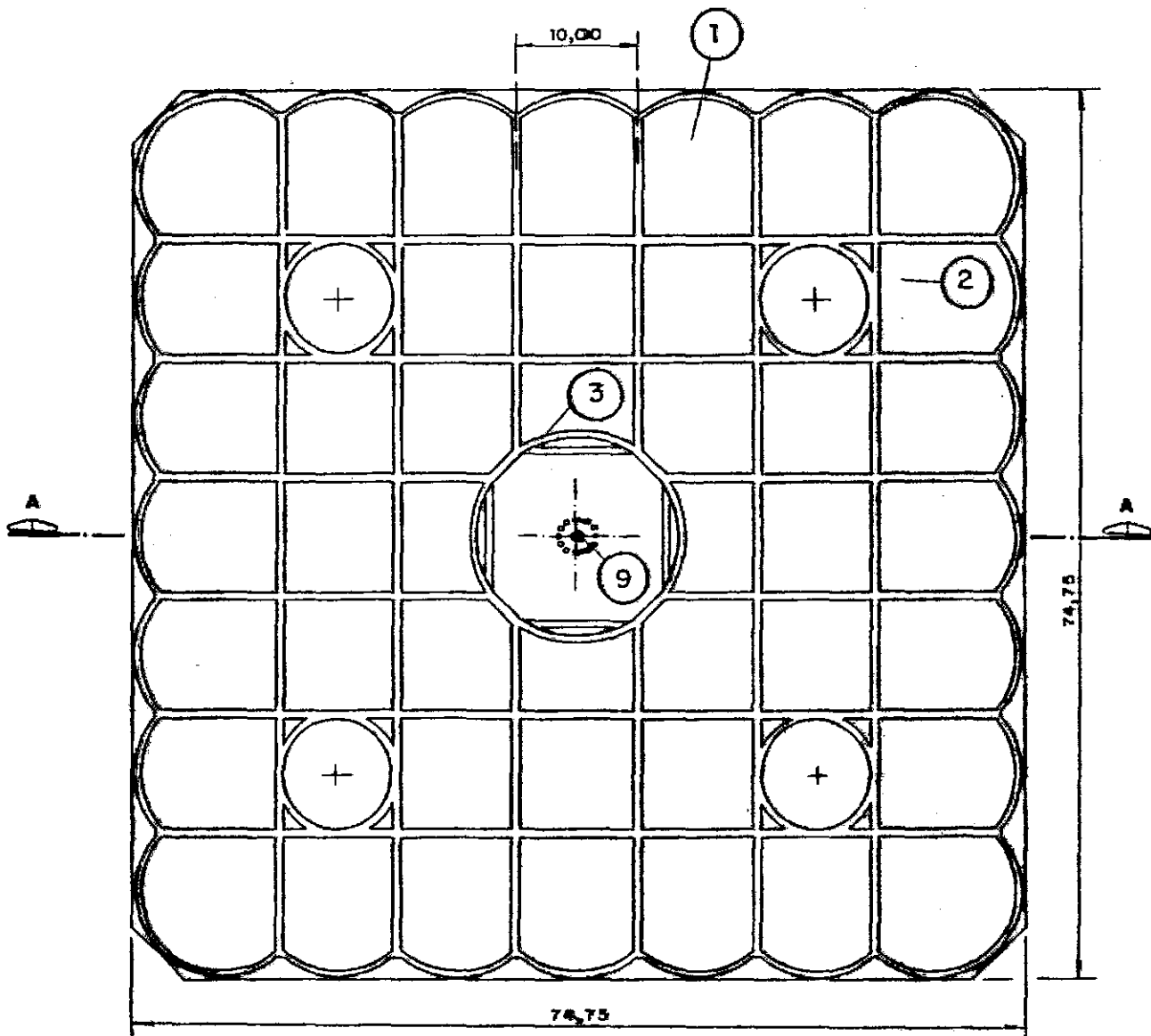


FIG. c

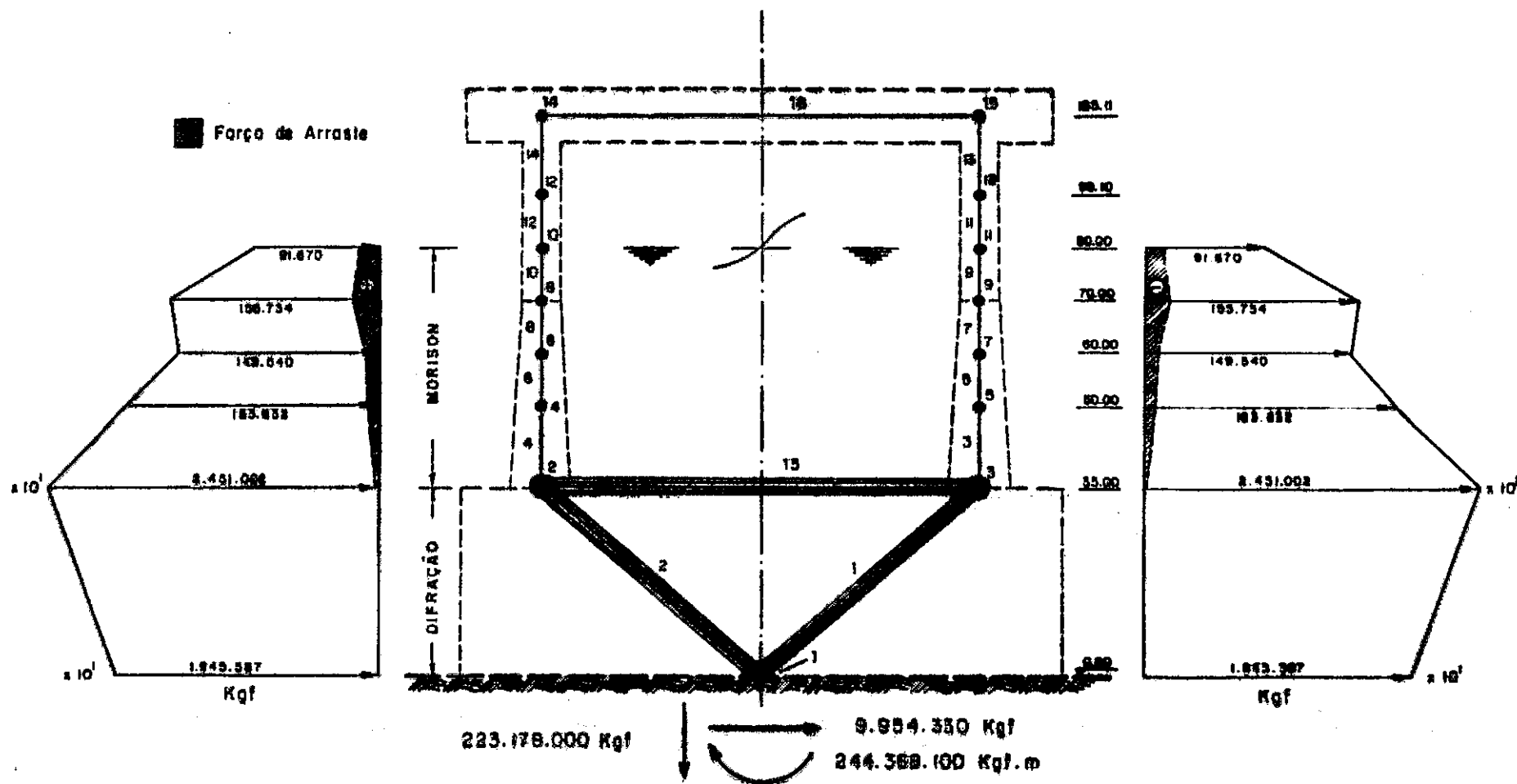


FIG. VII.12 - Situação de forças nodais máximas devido a ação da onda de projeto, para estrutura modelada pelo portico da figura ( EFEITOS GLOBAIS ).

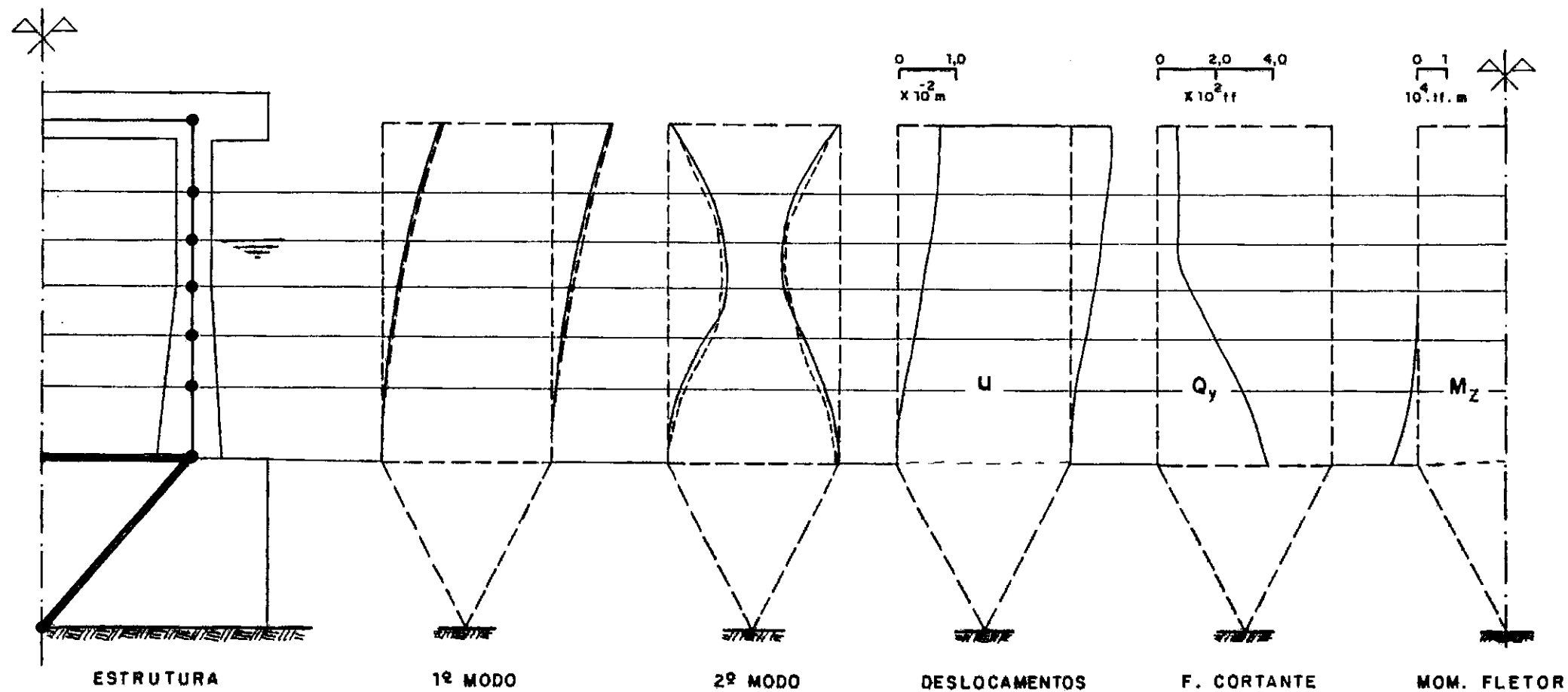


FIG. VII.13 - Modos de forma, e resposta máxima (envoltória) para estrutura E-IV. (com  $m_e + m_{ad}$ ).

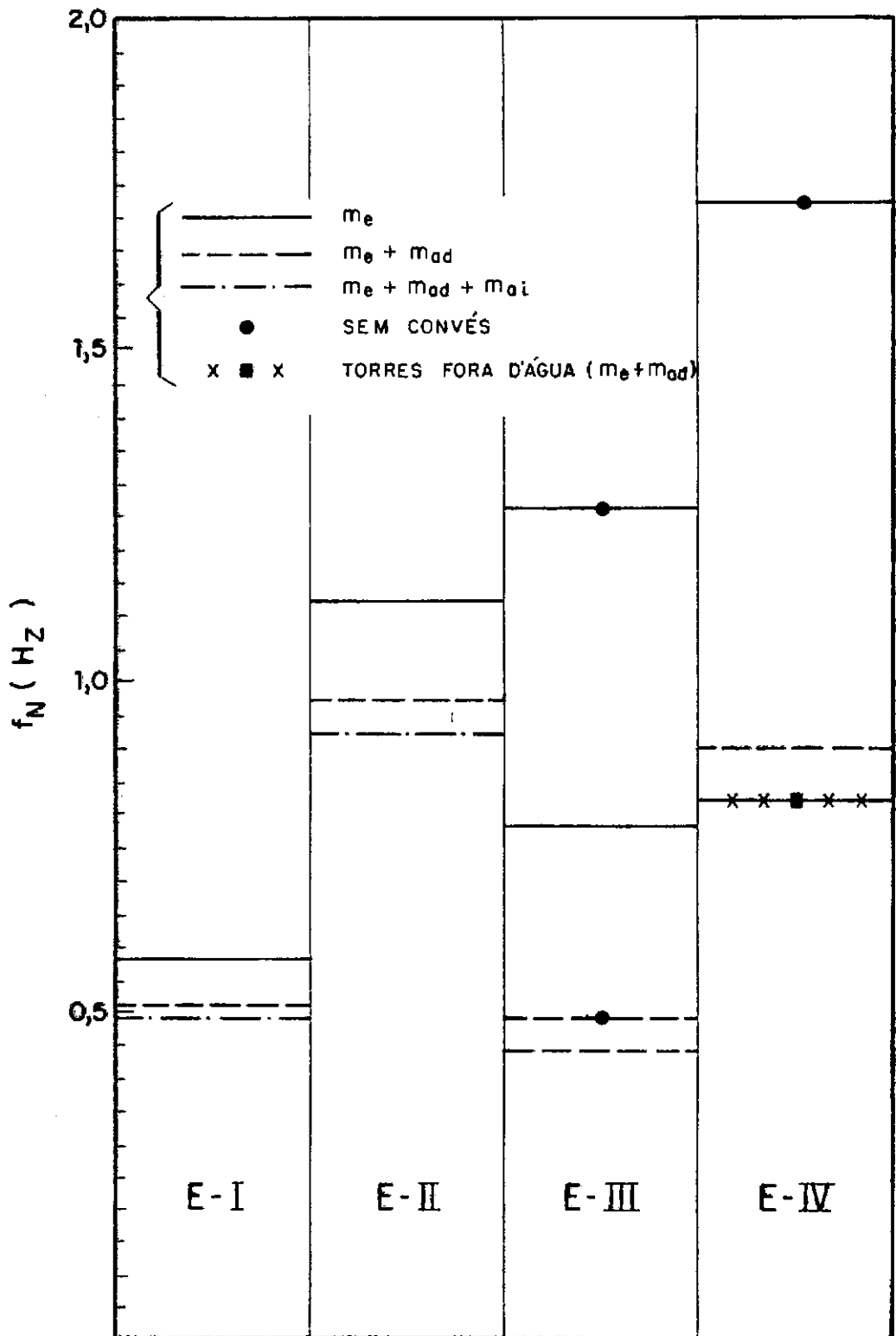


FIG. VII. 14 - Tipos de estruturas e suas primeiras frequências naturais ( $N_1$ ).

## ESTRUTURA E-I

Situação	Frequencias Naturais (Hz)					$U_{\max}$ (m)	Esforços Máximos	
	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$		$Q_y(t_f)$	$M_z(t_f.m)$
$M_e$	0,582	3,53	9,47	14,7	17,6	0,083	121	4125
$M_e + M_{ad}$	0,513	2,94	7,7	12,3	14,2	0,084	122	4159
$M_e + m_{ad} + m_{ai}$	0,492	2,80	7,26	11,6	13,4	0,084	122	4173

TABELA VII-3

## ESTRUTURA E-II

Situação	Frequencia Naturais (Hz)					$U_{\max}$	Esforços Máximos	
	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$		$Q_y(t_f)$	$M_z(t_f.m)$
$M_e$	1,12	5,0	12,0	16,9	21,2	0,0261	183	5540
$M_e + M_{ad}$	0,97	4,08	9,45	13,55	16,58	0,0262	183	5554
$M_e + M_{ad} + M_{ai}$	0,915	3,81	8,7	12,5	15,2	0,0263	184	5561

TABELA VII-4

## ESTRUTURAS E-III

Situação	Frequencias Naturais (Hz)					$U_{\max}$ (m)	Esforços Máximos	
	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$		$Q_y(t_f)$	$M_z(t_f.m)$
$M_e$	0,783	2,39	2,85	5,6	7,7	0,18	33284	1739400
$M_e + M_{ad}$	0,443	1,22	1,26	2,24	3,23	0,18	33852	1777500
$M_e + M_{ad}^*$	0,49	1,31	1,35	2,39	3,41	0,179	33822	1769400
$M_e^*$	1,26	3,52	3,58	6,54	9,36	0,175	33194	1730100

TABELA VIII-5 (\* SEM O CONVÉS)



## ESTRUTURA E-IV

Situação	Frequências Naturais (Hz)					$U_{\max}$ (m)	Esforços Máximos	
	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$		$Q_y$ (ft)	$M_z$ (tf.m)
$M_e$	0,816	6,0	6,35	6,70	6,94	0,0072	372,1	9672,5
$M_e^*$	0,816	5,86	6,00	6,33	6,70	0,0072	372,1	9672,5
$M_e + M_{ad}$	0,90	4,61	4,85	5,87	7,35	0,0071	372,0	9665,8
$M_{\bar{e}}$	1,71	6,0	7,08	7,38	13,21			
Reações	$m_e$		$m_e + m_{ad}$		$m_e^*$			
$R_x$	3225,35		3225,46		2225,60			
$R_z$	133.563		133.549		133.574			

(-) Sem o convês

\* Só o "Coisson" n'água

TABELA VII-6

CAPÍTULO VII - PARTE 3CONCLUSÕES, DISCUSSÕES E RECOMENDAÇÕESVII.3-1 - CONCLUSÕES

Da análise e interpretação dos resultados, e dos estudos desenvolvidos neste trabalho, além das já concluídas ponderações efetuadas em cada capítulo em particular, se pode generalizar uma série de constatações de caráter nitidamente importante:

- Como a maioria das estruturas correntes em Engenharia Civil, situados no mar, tais como: piers, cais, plataformas tipo jaqueta e gravidade, pilares, estacas, etc..., são elementos cilíndricos verticais (excetuando-se os casos de elementos inclinados) e de seção constante, as formulações aqui apresentadas se aplicam integralmente.
- Para o caso de estruturas com grandes dimensões (tipo gravidade "Caisson"), onde novamente persiste a geometria cilíndrica, a teoria da difração linear invicita, tem a sua mais eficaz aplicação. E no caso de seções variáveis, todavia com variações suaves, ainda assim esta formulação é adequada, uma vez que, a inclinação da superfície no cálculo exato conduziria a uma diminuição da força horizontal, as expensas do surgimento de uma componente vertical, que quase sempre se encontraria favorecendo as condições de estabilidade da estrutura.
- Para estruturas com formas arbitrárias, ou com grandes inclinações, como é o caso de estruturas em engenharia naval, esta teoria se mostra inaceitável, e outros processos (método das Funções de Green) tem apresentado bons resultados.
- Resultados experimentais tem mostrado que a teoria linear de ondas da bons resultados para a situação onde as forças devido ao espalhamento de ondas são maiores que a simples força fluido-dinâmica de arraste.

- Para plataformas do tipo gravidade onde o "Caisson" se encontra assente no leito do oceano, e conseqüentemente totalmente submerso, tem se notado que os componentes de altas ordens das teorias não lineares tem pouco efeito sobre este. Experiências também tem indicado que em muitos casos, como por exemplo, quando uma onda de Stokes-V é usada para representar a onda incidente, apenas a componente de primeira ordem tem efeito sobre o "Caisson", sendo por isso necessário apenas definir o potencial de 1.<sup>a</sup> ordem. Fato que vem realçar o uso da Teoria da difração linear.
- Quando da interação de ondas com estruturas de grandes dimensões, se exerce um forte controle sobre os parâmetros provocadores de não linearidades ( $H/L$ ,  $kh$ ), todos os efeitos serão função unicamente do parâmetro de espalhamento ( $ka$ ).
- Da magnitude e distribuição de todas as grandezas envolvidos no efeito de difração, se conclue que, o parâmetro de espalhamento ( $ka$ ) é o parâmetro mais importante (Característicos efeitos).
- Das considerações dos itens anteriores se conclui que, para as condições e limitações impostas no início deste trabalho, a Teoria da difração Linear representa um potente processo para a estimativa das ações das ondas.
- Pode-se observar pela gravura (VI.8) e (VI.9) que as torres analisadas se encontram numa região típica de predominância dos efeitos de Inércia; apesar do arraste ainda ser significativo, em virtude de sua defasagem, a força total na equação de Morison será dada unicamente pelo termo de Inércia. Se usada a Teoria de difração, ter-se-iam resultados mais conservadores (vide Fig. VII.5).
- Efeitos aparentemente secundários, tais como o desprendimento de vortices, associado ainda ao movimento da estrutura, em situações especiais podem ser importantes, daí porque estes efeitos em muitos casos devem ser previstos.

- É por vezes ilusório se pensar, que garantida as condições de ressonância para as oscilações da estrutura na direção da onda o problema esteja contornado; sendo que os limites de tolerância das excitações transversais podem ser atingidos, ainda que garantidas as condições anteriores.
- O efeito da massa adicional se manifesta mais acentuadamente para os mais altos modos, o que resulta numa redução da separação entre as frequências.
- O efeito da massa adicional, a rigor depende das propriedades dinâmicas da estrutura, e da forma dos modos de vibração.
- A resposta de uma estrutura com uso da massa adicional, como foi definido neste trabalho, não é o mesmo dos efeitos da água circundante.
- O efeito da água interna na estrutura, e da água Circundante diminui as frequências de vibração e modifica os modos de forma.
- Tanto a água Circundante como a água interna da estrutura tem o efeito de aumentar a massa virtual da estrutura, o que resulta num decrescimo da taxa de amortecimento, e em consequência num aumento da resposta.
- As frequências da torre com Inércia variável são mais espaçadas, que as da torre uniforme.
- A diferença mais significativa na dinâmica das duas torres, parece ser que, as frequências nas torres mais delgadas são mais afetadas pelos efeitos hidrodinâmicos.
- Os erros advindos da representação da resposta apenas com o modo fundamental, são maiores para a torre de seção variável.
- Os modos mais altos são relativamente maiores no caso da torre uniforme, devido ao menor afastamento das frequências.

- A resposta elástica de torres envolvidas por água sujeitas as cargas de onda pode ser obtida considerando-se apenas o modo fundamental de vibração.
- Notadamente, a resposta estrutural aumenta pela presença da água.
- As respostas considerando apenas o primeiro modo de vibração estão de lado da insegurança.
- Quando comparada as torres, parece que os maiores erros se situam no lado da torre uniforme, devido a menor separação entre as frequências.
- A respeito a equação de Morison tem-se a dizer que, não é suficiente acrescentar se correções nos coeficientes impiricos para levar-se em conta certos efeitos paralelos (desprendimendo de vórtices, campo adicional de forças causado pela formação de ruídos, etc.), que na verdade com isso, se introduz a dificuldade de se depender de resultados experimentais, para cada problema em particular (nem sempre é possível extrapolar se a uma classe de problemas). Torna-se premente a formulação de um modelo (Quem sabe mais termos na equação de Morison) que procure levar em conta estes efeitos, e não corrigir-se os coeeficientes a cada passo, a medida que mais e mais efeitos são introduzidos.
- O Termo de Inércia na equação de Morison foi obtido da análise de forças sobre um corpo num fluxo acelerado, e num fluido ideal. E o termo de arraste pela força exercida sobre o corpo por um escoamento permanente para um fluido real e viscoso, e isso parece não ser muito consistente.
- não adianta se utilizar teorias de ondas mais sofisticadas - (não lineares), na busca de maiores precisões, quando se desconhece, ou mesmo se dá pouca importância aos coeficientes impiricos da equação de Morison; em que nestes poderão se localizar maiores erros, que a precisão que as teorias mais sofisticadas poderão fornecer.

## APÊNDICE I

Seja:

$J_n$  = função de Bessel .

$Y_n$  = função de Weber = função de Bessel do 2º tipo

$J_n$  e  $K_n$  são funções de Bessel modificadas de 1º e 2º tipo.

As fórmulas abaixo podem ser tomadas como definição:

$$J_n(kr) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (kr/2)^{n+2p}}{p! (p+n)!} \quad (1)$$

$$Y_n(kr) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ \log \left( \frac{kr}{2} \right) - \gamma \right] J_n(kr) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-p-1)! (kr/2)^{2p-n}}{p! (n-p)!} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[ \psi(p) + \psi(p+n) \right] \frac{(kr/2)^{2p+n}}{p! (n+p)!} \right\} \quad (2)$$

$$I_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kr/2)^{2p+n}}{p! (n+p)!} \quad (3)$$

$$K_n = \frac{\pi}{2} (i)^{n+1} \left[ J_n(ikr) + i Y_n(ikr) \right] \quad (4)$$

onde

$$\gamma = \text{constante Euler} = 0,5772157$$

e

$$\psi(p) = \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \quad \psi(0) = 0$$

para grandes  $r$ , temos as aproximações assintóticas

$$J_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad J_n(kr) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ekr}{2n}\right)^n \quad (5)$$

$$Y_n(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad (6)$$

$$I_n(kr) \approx \frac{e^{kr}}{\sqrt{2\pi k r}}, \quad K_n(kr) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi k r}} e^{-kr} \quad (7)$$

por combinação linear de  $J_n$  e  $Y_n$  as funções de Hankel de 1º e 2º tipo são definidas

$$H_n^{(1)} = J_n + i Y_n \quad \text{e} \quad H_n^{(2)} = J_n - i Y_n \quad (8)$$

para grandes argumentos, segue de (5) a (8)

$$H_n^{(1)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$H_n^{(2)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)} \quad (9)$$

$$H_n^{(1)'}(kr) \approx i H_n^{(1)}(kr)$$

Fórmulas de recorrências para as funções de Bessel:

$$J_{n+1}(kr) = \frac{2n}{kr} J_n(kr) - J_{n-1}(kr) \quad (10)$$

$$J_{-n}(kr) = (-1)^n J_n(kr), \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (11)$$

$$J_0'(kr) = -J_1(kr) \quad (12)$$

$$J_n'(kr) = \frac{k}{2} \left[ J_{n-1}(kr) - J_{n+1}(kr) \right] \quad (13)$$

Fórmulas semelhantes são também aplicadas às funções de Bessel de 2º tipo ( $Y_n$ )

Para  $Y_0$  temos:

$$Y_0(kr) = \frac{2}{\pi} \left[ \ln(kr/2) + \gamma \right] J_0(kr) + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{(Kr)^2}{2^2} - \frac{(kr)^4}{2^2 4^2} + \dots \right] + \frac{(kr)^6}{2^2 4^2 6^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \quad (14)$$

$$H_n^{(1)'}(kr) = H_n'(kr) = J_n'(kr) + i Y_n'(kr) \quad (15)$$

Quando:

$$Kr \rightarrow 0 \quad \dots \quad Kr \ll 1$$

$$J_n(kr) \sim (kr)^n / 2^n \cdot n!$$

$$J_0(kr) \approx 1 \quad J_0'(kr) \approx -\frac{kr}{2}$$

$$J_1(kr) \approx \frac{kr}{2} \quad J_1'(kr) \approx \frac{1}{2}$$

$$Y_0(kr) \approx \frac{2}{\pi} (\ln kr - \gamma)$$

$$Y_1(kr) \approx -2 / \pi kr \quad Y_1'(kr) = 2 / \pi (kr)^2$$

$$J_n'(kr) \approx \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{kr}{2} \right)^{n-1}$$

$$H_n(kr) \sim -i 2^n (n-1)! / \pi (kr)^n$$

$$H_0 \approx \frac{2i}{\pi} \ln kr + o(kr)^2 \ln kr$$



$$Y'_0(kr) \approx \frac{2}{\pi kr}$$

$$Y_n(kr) \approx -\frac{(n-1)}{\pi} \left(\frac{2}{kr}\right)^n \quad Y'_n(kr) \sim \frac{n!}{2\pi} \left(\frac{2}{kr}\right)^{n-1} \quad n > 0$$

$$A(kr) = \pi/2 \cdot (kr)^2 \quad \delta(kr) = \pi/4 \cdot (kr)^2$$

APÊNDICE IIRUDIMENTOS DE HIDROMECÂNICAII.1 - REVISÃO DE HIDROMECÂNICAII.1-1 - Introdução

O estudo das ondas e seus efeitos sobre estruturas no mar exige, antes de mais nada, conhecimentos de mecânica dos fluidos.

Este Apêndice é devotado à revisão dos fundamentos de hidromecânica. Sobre o assunto, e atendendo a várias abordagens, muito se tem encontrado na literatura; todavia, o que será aqui apresentado, restringe-se unicamente aos conceitos básicos essenciais, julgados necessários à compreensão do trabalho.

Sem o interesse de demonstrações exaustivas nem tampouco detalhar o assunto, os fundamentos aqui transcritos, apresentam-se por vezes mesclados a outros conceitos, sem que estes sejam anteriormente referidos.

Inicialmente são apresentadas as equações fundamentais e a seguir os escoamentos potenciais básicos, até a geração do corpo cilíndrico virtual, que será o objeto de nosso estudo no meio fluido.

Entre tantas referências, recomendam as obras | 94 |, | 109 |, | 170 |, | 84 |, | 86 |, | 169 |, | 126 |, | 178 |, | 145 |, | 17 |, | 168 |, | 162 |, | 97 |, | 137 |, e etc...

## 11.1-2 - Equações Fundamentais

### 11.1-2.1 - Equação Hidrostática

Seja um volume elementar de água  $\Delta v$ , a uma profundidade  $h$ , com faces opostas na direção  $y$ , e áreas elementares,  $\Delta A_s$  e  $\Delta A_i$ . Se o elemento se encontra num estado estático de equilíbrio, a equação das forças na direção vertical será:

$$\left[ - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y \right) \Delta A_s - p \Delta A_i - \gamma \Delta v j_{\sim} \right] \cdot j_{\sim} = 0$$

onde:

$p$  = pressão

$\gamma$  = peso específico

$j_{\sim}$  = unitário na direção  $y$

como

$$| \Delta A_s \cdot j | = | \Delta A_i \cdot j | = \Delta A y$$

resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \gamma \quad (11.1-1)$$

$$\text{por outro lado } \frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (11.1-2)$$

que pode ser integrada diretamente.

Logo, (11.1-1) pode ser escrita

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \gamma$$

e,

$$p = - \int_0^{-h} \gamma dy = \begin{cases} \gamma h, & \gamma = \text{constante} \\ f(h), & \gamma = \text{variável} \end{cases} \quad (11.1-3)$$

### 11.1-2.2 - Equação da Continuidade

Expressa o fato do fluido não poder ser criado nem destruído:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] = - \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \quad (11.1-4)$$

ou,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (11.1-5)$$

Se o fluido for incompressível,  $\rho = \text{constante}$  e  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ , então:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11.1-6)$$

ou

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

### 11.1-2.3 - Fluxos Rotacionais e Irrotacionais

O conceito de rotacionalidade está ligado à noção de circulação e vorticidade.

Circulação,  $\Gamma$ , é definida como a integral de linha da velocidade tangente do fluido, ao redor de uma curva fechada  $\ell$ , incluindo uma superfície  $S$  dentro da região do fluido considerado.

Então, tem-se:

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint (u dx + v dy + w dz) \quad (11.1-7)$$

Usando-se o Teorema de Stokes,

$$\Gamma = \oint_{\ell} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{s} = 2 \int_S \vec{\omega} \cdot n dS \quad (11.1-8)$$

onde  $\vec{\omega}$  é o vetor rotação, cujas componentes representam a taxa de rotação das partículas do fluido em torno dos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . (Ver Schlichting - 1968)

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V} \quad (11.1-9)$$

Se a integral de linha é independente da trajetória, para qualquer ponto  $a$  e  $b$  sobre  $\ell$ , então a Circulação é zero, isto é,

$$\oint_b^a \vec{V} \cdot d\vec{s} = - \oint_b^a \vec{V} \cdot d\vec{s} \quad (11.1-10)$$

logo:

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0$$

Sendo  $\text{rot } \vec{V} = 0$ , esta condição é necessária e suficiente para a potencialidade de um campo de velocidades, isto é, da existência de uma função escalar  $\phi$  (potencial de velocidades), tal que  $\vec{V} = \nabla \phi$

ou

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \text{ etc } \dots \quad (11.1-11)$$

11.1-2.4 - Equações do Movimento

Pela segunda lei de Newton, tem-se:

$$\Sigma \underline{F} = \frac{d(m \underline{V})}{dt} = m \frac{d \underline{V}}{dt} + \underline{V} \frac{dm}{dt} = m \left( \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} \right) \quad (11.1-12)$$

Aplicando esta equação a uma massa elementar de fluido  $m$ , de volume constante  $\Delta v$ , sujeita a tensões cisalhantes  $\tau_{ij}$ , normais,  $\sigma_{ii}$ , e a forças de corpo,  $\underline{f} \Delta v$ , chega-se:

$$\rho \Delta v \left( \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} \right) = \underline{f} \Delta v + \left[ \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \underline{i} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \underline{j} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \underline{k} \right]$$

conforme  $\left| \underline{i}, \underline{j}, \underline{k} \right|$  (11.1-13)

$$\sigma_{ii} = -p + \bar{\sigma}_{ii} \quad (11.1-14)$$

onde

$$\bar{\sigma}_{ii} = 2 \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3) \quad (11.1-15)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4) \quad (11.1-16)$$

---

(3), (4) - Um único sub-índice se refere a velocidade e as coordenadas direcionais

Levando-se (11.1-14) a (11.1-16) em (11.1-13) chega-se a Equação de Navier - Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} \right) = \underline{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{V} \quad (11.1-17)$$

Quando (11.1-17) é aplicada a um fluxo sem viscosidade ( $\mu = 0$ ) onde as forças de corpo são o peso do fluido, a expressão resultante é chamada Equação de Euler.

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} \right) = -g \underline{j} - \nabla p \quad (11.1-18)$$

onde

$$\underline{V} \cdot \nabla \underline{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - \underline{V} \times (\nabla \times \underline{V}) \quad (11.1-19)$$

como foi visto na seção anterior.

$$\text{rot } \underline{V} = \nabla \times \underline{V} = 0$$

então (11.1-19) fica:

$$\underline{V} \cdot \nabla \underline{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right)$$

e a equação (11.1-18) se transforma em:

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + g y \right) + \frac{\nabla p}{\rho} = 0 \quad (11.1-20)$$

que integrada entre dois pontos quaisquer se obtém

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + g y + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (11.1-21)$$

Denominada Equação de Bernoulli, que é um balanço matemático da conservação de energia para um fluxo irrotacio

nal e incompressível.

#### 11.1-2.4.1 - Conservação da Quantidade de Movimento

Seja um sistema constituído por massas de partículas fluídicas - aplicando a segunda lei de Newton as massas das partículas contidas num volume de controle fixo ( $V$ ) em relação aos eixos ( $x, y, z$ ), e superfície ( $A$ ), para um escoamento de velocidade ( $\vec{V}$ ), e que coincida exatamente com ( $V$ ) num dado instante de tempo ( $t$ ), tem-se:

$$\vec{F} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{V} dV \quad (11.1-21a)$$

onde

$Q$  = quantidade de movimento por unidade de massa

$F$  = soma das forças externas atuando sobre a superfície de Controle ( $S$ )

Far-se-á agora a taxa de variação com o tempo do valor de  $Q$  para o sistema, em termos do volume de controle.

$$\vec{F} = \frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{(Q_{t+\Delta t})_{sis} - (Q_t)_{sis}}{\Delta t} \right] \quad (11.1-21b)$$

como

$$(Q_t)_{sis} = (Q_t)_A$$

então:



$$(Q_{t+\Delta t})_{\text{sist}} = (Q_{t+\Delta t})_A + (Q)_{\text{sai}} - (Q)_{\text{entra}}$$

Trabalhando estas expressões, levando ao limite e agrupando as parcelas do fluxo de entrada e saída de  $Q$ , no volume de controle, em resultados semelhantes <sup>118</sup> chega-se a:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV + \int_A \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (11.1.21-c)$$

ou seja: a força resultante que age num volume de controle é igual a taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento do volume de controle, mais os saldos dos fluxos da quantidade de movimento através da superfície de controle.

### 11.1-3 - Escoamento Potencial

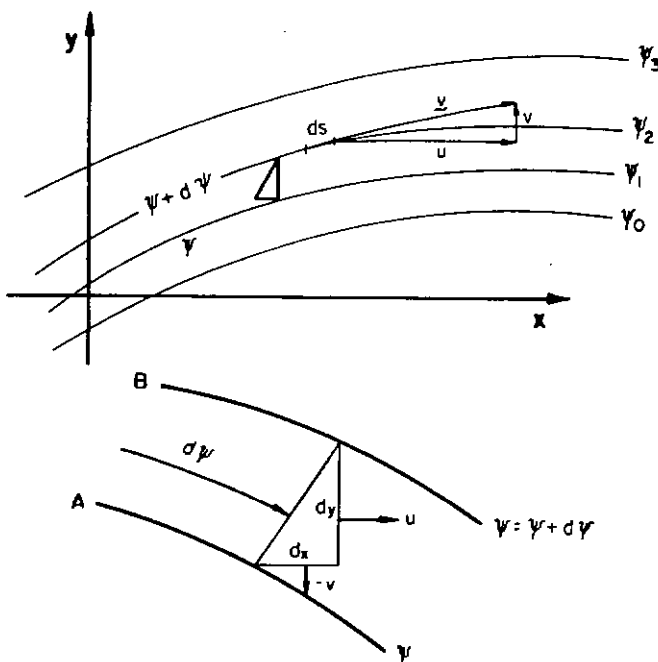


FIG. II.1 - Linhas de corrente num escoamento potencial.

Sabe-se que  $\psi = \text{constante}$  ao longo de uma linha de corrente. Avazão entre as L. C. A e B será  $d\psi$ ; por uma questão de continuidade

$$d\psi = -v dx + u dy \quad (11.1-22)$$

$$\psi = \psi(x, y) \quad (11.1-23)$$

A diferencial total de (11.1-23) será

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (11.1-24)$$

comparando-se (11.1-24) e (11.1-22)

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{e} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (11.1-25)$$

por outro lado, sabe-se da equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{div } \underline{V} = 0$$

ou,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11.1-26)$$

para equação da linha de corrente tem-se:

$$\underline{V} \times d\underline{s} = 0 \quad (11.1-27)$$

onde

$$\begin{cases} \underline{V} = u \vec{i} + v \vec{j} \\ d\underline{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j} \end{cases} \quad (11.1-28)$$

Para (11.1-27) ser válida

$$u \vec{i} \cdot d\vec{y} = v \vec{j} \cdot d\vec{x} \quad (11.1-29)$$

o que significa:

$$\boxed{u dy - v dx = 0} \quad (11.1-30)$$

que é a conhecida equação da linha de corrente, como se queria de mostrar.

Comparando (11.1-24) com (11.1-30) vem:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy = 0$$

$$\rightarrow d\psi = 0 \quad \therefore \psi = \text{constante}$$

ao longo de uma linha de corrente.

#### 11.1-4 - RELAÇÃO ENTRE O POTENCIAL DE VELOCIDADES E A FUNÇÃO DA CORRENTE

$$\phi = (x, y, t)$$

sabe-se que:

$$\psi = (x, y, t)$$

aplicando-se o Gradiente ( $\nabla$ ) vem:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} = -v \vec{i} + u \vec{j}$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = u(-v) \vec{i} \cdot \vec{i} + uv \vec{j} \cdot \vec{j} = -uv + uv = 0$$

$$\rightarrow \nabla \phi \perp \nabla \psi$$

como  $\nabla \phi = V$  é tangente à linha de corrente, tem-se:

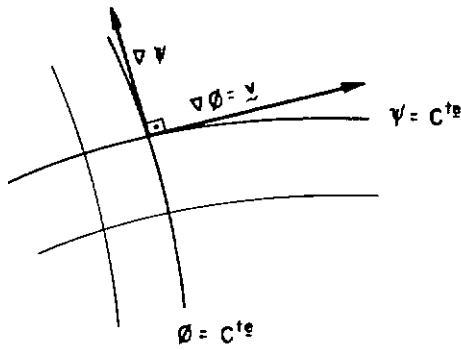


FIG. II.2 - Ortogonalidade das linhas de corrente e equipotenciais.

#### II.1-5 - $\psi$ COMO MEDIDA DE VAZÃO

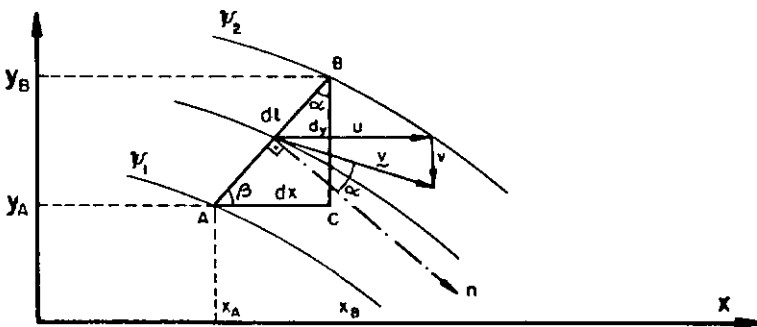


FIG. II.3 - Vazão entre duas linhas de corrente.

Seja o fluxo através da linha  $\overline{AB} \rightarrow dQ_{A-B} = V \cdot \eta \, d\ell$

$$d\ell = dL = B - A \quad \therefore \quad Q = \int_A^B V \cdot \eta \, d\ell$$

$$dQ = (u \hat{i} - v \hat{j}) \cdot (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) \, d\ell = (u \cos \alpha - v \sin \alpha) \, d\ell$$

Pela Figura II-3 vem:

$$dx = d\ell \sin \alpha$$

$$dy = d\ell \cos \alpha$$

logo  $dQ = u dy - v dx$ , que é idêntica a equação (11.1-22)  
então  $dQ = d\psi$  e

$$Q = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad \text{c.s.q.d.} \quad (11.1-31)$$

## 11.1-6 - ESCOAMENTOS BÁSICOS

### 1º) Escoamento R. u.

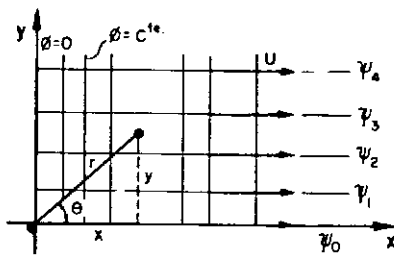


FIG. II. 4 - Escoamento retilíneo uniforme.

$$\psi = \psi(x, y)$$

então

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \cancel{-v dx} + u dy$$

$$d\psi = u dy$$

$$\int d\psi = \int u dy + \int (0) dx = \int u dy$$

$$\psi = uy + C$$

fazendo  $\psi = 0$  a linha de corrente passa na origem  $\rightarrow C = 0$

$$\psi = u y, \quad \text{como} \quad y = r \sin \alpha$$

$$\boxed{-\psi = u r \sin \theta} \quad (11.1-32)$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

$$\int d\phi = \int u dx + \int (0) dy = ux + C$$

$$\phi = ux + C$$

fazendo  $\phi = 0$  para  $x = 0$  vem  $\therefore c = 0$  como  $x = r \cos \theta$

$$\boxed{\phi = ux} \quad \text{ou} \quad \boxed{\phi = ur \cos \theta} \quad (11.1-33)$$

### 11.1-7 - FONTE E SUMIDOURO

Seja  $q$  = vazão por unidade de comprimento, que deixa o ponto na unidade de tempo

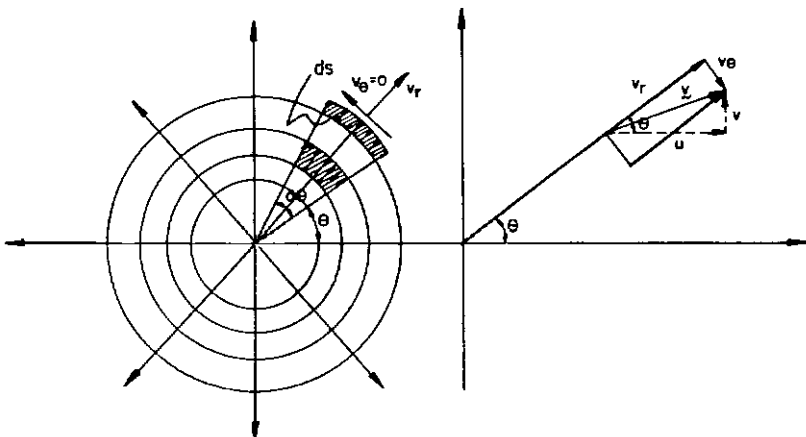


FIG. 11.5 - Fonte e/ou sumidouro.

$q$  = constante para o mesmo raio

$v$  = constante para o mesmo raio

como  $q$  = constante  $\chi$  deve diminuir a medida que as L. C. se espalham

$$dq = \chi ds = v_r ds = v_r \cdot r d\theta \quad q = v_r \int_0^{2\pi} r d\theta = v_r \cdot r [\theta]_0^{2\pi}$$

$$q = v_r \cdot 2\pi r \quad (11.1-34)$$

$$v_r = \frac{q}{2\pi r} \quad \text{e} \quad v_\theta = 0$$

Quando  $r \rightarrow 0$ ,  $v_r \rightarrow \infty$  por que  $q$  = constante  $\rightarrow$  Singularidade

Como  $\psi$  e  $\phi$  são funções de  $(x, y)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = f_1(r, \theta) \\ y = f_2(r, \theta) \end{cases} \quad (11.1-35)$$

logo

$$\psi = f(x, y) = f[f_1(r, \theta), f_2(r, \theta)] = F(r, \theta) \quad (11.1-36)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \quad (11.1-37)$$

ou

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \quad (11.1-38)$$

por sua vez de (11.1-35) vem:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \quad (11.1-39)$$

Substituindo a equação (11.1-39) em (11.1-38),

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = + v r \sin \theta + u r \cos \theta \quad (11.1-40)$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v \sin \theta + u \cos \theta = v_r \quad (\text{Vide Figura 11-5})$$

Fazendo de maneira análoga relação a  $r$  vem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad (11.1-41)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \quad (11.1-42)$$

Levando-se (11.1-42) em (11.1-41)

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v \cos \theta + u \sin \theta = -v_\theta \quad (\text{Vide Figura 3-5})$$

a diferencial total de  $\psi$  será

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot d\theta$$

$$d\psi = -v_\theta dr + r \cdot v_r d\theta$$

$$\psi = - \int v_\theta dr + \int v_r \cdot r d\theta$$



Como  $v_\theta = 0$  e  $v_r = \frac{q}{2\pi r}$

$$\psi = \int \frac{q}{2\pi r} \cdot r \, d\theta = \frac{q}{2\pi} [\theta]_0^\theta + c$$

$$\psi = \frac{q\theta}{2\pi} + c$$

Fazendo  $\psi = 0$  para  $\theta = 0 \longrightarrow c = 0$

$$\psi = \frac{q\theta}{2\pi} \quad (11.1-43)$$

#### 11.1-8 - OBTENÇÃO DE $\psi$ A PARTIR DE $\phi$ OU VICE-VERSA

Sejam as relações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} & v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} & v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array}} \quad (11.1-44)$$

Se  $\phi$  ou  $\psi$  é conhecida, por (11.1-44) pode-se resolver para uma ou outra. Seja:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \therefore \quad \partial \psi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dy$$

então

$$\psi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dy + f(x)$$

ou

$$\psi = - \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dx + f(y) \quad (11.1.45)$$

Exemplo: Seja potencial da fonte (sumidouro) dado por

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

Sejam as expressões em coordenadas polares

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = v_\theta \quad v_\theta = - \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$\therefore$

(11.1-46a)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \therefore \quad \partial \psi = r \frac{\partial \phi}{\partial r} d\theta$$

$$\psi = \int r \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) d\theta + f(r) \quad (11.1-46b)$$

$$\psi = - \int \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) dr + g(\theta) \quad (11.1-46c)$$

como  $\psi = \frac{q}{2\pi} \ln r$  vem por (11.1-46b)

$$\psi = \frac{q\theta}{2\pi} + f(r) \quad (11.1-46d)$$

De (11.1-46-c) vem:  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$

$$\psi = - \int \frac{1}{r} (0) dr + g(\theta) = g(\theta) \quad (11.1-46e)$$

igualando-se as duas últimas equações vem:

$$\frac{q \theta}{2 \pi} + f(r) \equiv g(\theta)$$

Comparando-se os dois membros, conclui-se que:

$$g(\theta) = \frac{q \theta}{2 \pi} \quad \text{e} \quad f(r) = 0 \quad (11.1-46f)$$

logo:

$$\psi = \frac{q \theta}{2 \pi} \quad \text{como se pretende demonstrar.}$$

Com processo idêntico, somente pelo caminho inverso, poderia se obter  $\phi$ , a partir de  $\psi$  conhecido.

### 11.1-9 - VÓRTICE LIVRE: $\square \square$ <sup>(5)</sup>

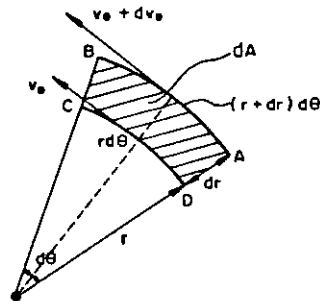
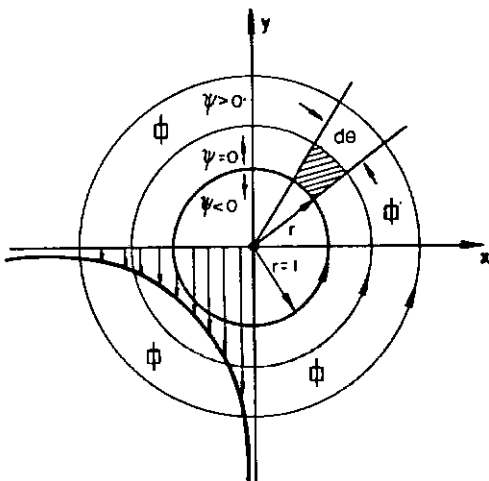


FIG. II.6 - Vortice livre.

(<sup>5</sup>) - partícula flutuando num vórtice com superfície livre.

Para calcular a distribuição de velocidade, toma-se um elemento de área  $dA$  e calcula-se a circulação em torno dele ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ )

$\Gamma$  será = 0 para  $\forall$  contorno que não seja ponto de descontinuidade, como em tal escoamento  $v_r = 0$  vem:

$d\Gamma$  em torno de  $dA$  será ( $A \rightarrow 0$ ):

$$d\Gamma = 0 = (v_\theta + dv_\theta)(r + dr)d\theta + 0 - v_\theta(rd\theta) + 0,$$

que resulta:

$$d\Gamma = v_\theta dr d\theta + dv_\theta r d\theta = 0$$

$$d\Gamma = d(v_\theta r) d\theta = 0 \longrightarrow \theta \neq 0 \therefore d(v_\theta r) = 0$$

onde

$$v_\theta \cdot r = \text{constante, resultado já esperado.}$$

$$\text{Sabe-se que: } dA = r d\theta \cdot dr$$

$$\text{Se } d(v_\theta r) = 0 \longrightarrow v_\theta r = \text{constante}$$

isto mostra que:

$$\text{Quando } r \rightarrow 0, \quad v_\theta \rightarrow \infty$$

por outro lado

$$\Gamma = \int_A d\Gamma = \int_A d(v_\theta r) d\theta = \int_A \frac{d(v_\theta r)}{r \cdot dr} \cdot r dr d\theta$$

$$\Gamma = \int_A \frac{1}{r} \frac{d(v_\theta r)}{dr} dA$$

como para  $\forall$  pedaço de área  $\Gamma = 0$ , vem que o integrando

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (V_{\theta} r) = 0 \quad v_{\theta} \cdot r = \text{constante}$$

A circulação ao longo de uma linha de corrente fechada será:

$$\Gamma = \oint \underline{v} \cdot d\underline{s} = \oint V_{\theta} \cdot r d\theta = V_{\theta} r [\theta]_0^{2\pi}$$

$$\Gamma = 2\pi V_{\theta} r \longrightarrow \text{para } \forall \text{ linha de corrente} \quad (11.1-47)$$

que inclua o centro,  $\Gamma$  será o mesmo e diferente de zero, não significando que o regime seja rotacional, pois não é aplicável o Teorema de Stokes, isto é,

se,

$$\oint \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_A \nabla \cdot \underline{v} dA \neq 0 \longrightarrow \nabla \times \underline{v} \neq 0 \Rightarrow \text{regime rotacional (contorno)}$$

pois  $\underline{v}$  não é definido em todo o interior do contorno (centro) logo não se poderá aplicar  $\oint \underline{v} \cdot d\underline{s}$

Para  $\forall$  contorno que inclua o centro tem-se  $\Gamma \neq 0$

$$\Gamma = 2\pi r V_{\theta} \quad \therefore \quad V_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \text{e} \quad V_r = 0$$

por outro lado

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -v_{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_r$$

logo

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot dr$$

$$\int d\psi = \int -v_{\theta} dr$$

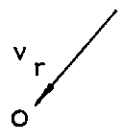
$$\psi = - \frac{r}{2\pi} \int \frac{dr}{r} = - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + C$$

$$\psi = 0 \quad \text{para} \quad r = 1, \quad \ln r = 0 \quad \text{e} \quad C = 0$$

$$\psi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (11.1-48)$$

como

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta \quad . \cdot .$$

$$d\phi = \cancel{v_r} dr + r v_{\theta} d\theta$$


$$d\phi = r v_{\theta} d\theta \quad . \cdot . \quad \phi = \int \frac{\Gamma}{2\pi r} r d\theta$$

$$\phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} + C$$

fazendo  $C = 0$ , chega-se:

$$\phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (11.1-49)$$

onde:  $\phi$  representa o potencial de velocidades para um vórtice livre; e  $\Gamma$  a intensidade do mesmo. (Positiva quando no sentido anti-horário).

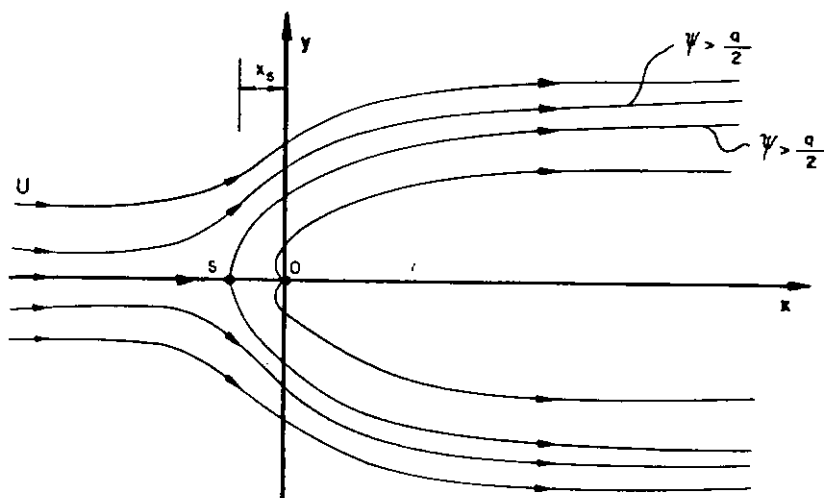
11.1-10 - FONTE NUM ESCOAMENTO RETILÍNEO

FIG. II.7 - Fonte num escoamento retilíneo.

Sejam:

$$\text{Escoamento Retilíneo} \rightarrow \psi_B = u_y = u_r \sin \theta \quad (11.1-50)$$

$$\text{Fonte} \rightarrow \psi_A = \frac{q \theta}{2 \pi}$$

$$\psi = \psi_A + \psi_B = u_r \sin \theta + \frac{q \theta}{2 \pi} \quad (11.1-51)$$

$$v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = u \cos \theta + \frac{q}{2 \pi r} \quad (11.1-52)$$

$$v_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = - u \sin \theta \quad (11.1-53)$$

- próximo ao ponto 0 tem-se grandes velocidades, que diminuem com o aumento de  $r$ .

A partir de 0 tem-se um ponto (S), em que a velocidade da fonte = velocidade escoamento retilíneo, donde resulta:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0 \quad \text{para } (S)$$

as partículas não conseguem ultrapassar este ponto e são levadas pelo escoamento uniforme, formando uma linha que pode ser considerada o contorno do corpo. (Vide Figura 11-7).

Para ponto S temos:

$$r = x = x_S, \quad v_\theta = 0, \quad v_r = 0 \quad \text{e} \quad \theta = \pi.$$

como

$$v_r = u \cos \theta + \frac{\dot{q}}{2\pi r} = 0$$

e

$$v_\theta = -u \sin \theta = 0$$

resulta

$$x_S = \frac{q}{2\pi u} \quad (11.1-54)$$

e a função de corrente passando por S será:

$$\psi_S = u \left[ \frac{q}{2\pi V} \right] \sin \pi + \frac{q\pi}{2\pi} \quad (11.1-55)$$

$$\psi_S = \frac{q}{2}$$

e a equação do contorno do corpo passa a ser:

$$\psi_S = \frac{q}{2} = u r \sin \theta + \frac{q\theta}{2\pi} \quad (11.1-56)$$

- Outras Dimensões para o Corpo:

$$1^\circ) \quad \text{para } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{sobre } \psi_S = \frac{q}{2} \quad \text{vem:}$$



$$\frac{q}{2} = u y + \frac{q\pi}{4\pi} \quad \therefore \quad y = \frac{q}{4u} \quad (11.1-57)$$

2º) Para  $\theta = 0$  sobre  $\psi_S = \frac{q}{2}$

$$\frac{q}{2} = u y \quad \therefore \quad y = \frac{q}{2u} \quad \therefore \quad q/\theta \rightarrow 0, \quad y \rightarrow q/2u \quad (11.1-58)$$

### 11.1-11 - FONTE E SUMIDOURO DE INTENSIDADES IGUAIS

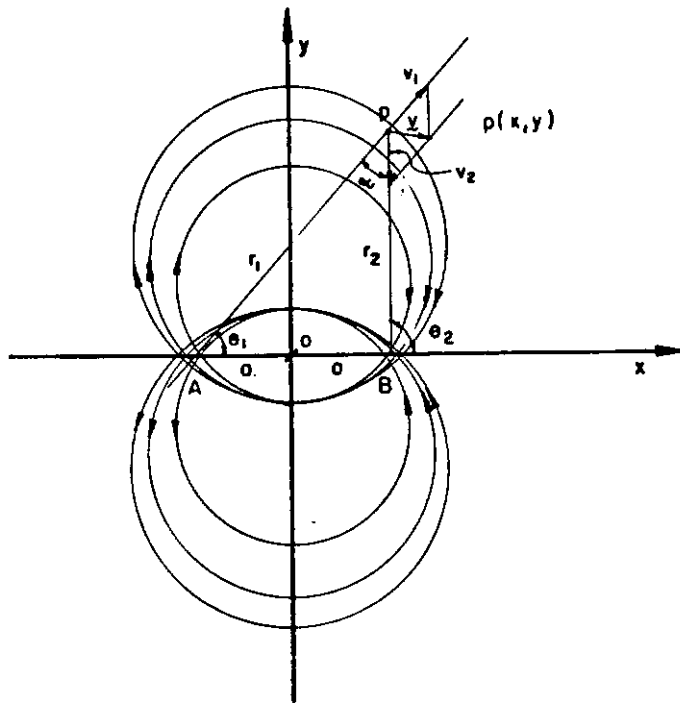


FIG. II.8- Fonte e sumidouro de mesma intensidade.

Sejam uma fonte e sumidouro de potenciais  $q$  e  $-q$ .

$$\psi_A = \frac{q\theta_1}{2\pi}, \quad \psi_B = -\frac{q\theta_2}{2\pi}$$

$$\psi = \psi_A + \psi_B = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

porém  $\alpha = \theta_2 - \theta_1 = \text{constante ao longo da linha da corrente.}$

$$\psi = - \frac{q}{2\pi} \alpha \quad (11.1-59)$$

Por outro lado:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{y}{x+a} \quad \therefore \quad \theta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x+a}$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{y}{x-a} \quad \therefore \quad \theta_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x-a}$$

Então:

$$\psi = - \frac{q}{2\pi} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x-a} \right] \quad (11.1-60)$$

com  $\psi$  pode-se obter as velocidades, no entanto, é mais fácil obtê-las diretamente das expressões já usadas para fonte

$$v_{\theta}^f = \frac{q}{2\pi r_1} \quad e \quad v_{\theta}^s = - \frac{q}{2\pi r_2} \quad (11.1-61)$$

## 11.1-12 - DIPÓLO

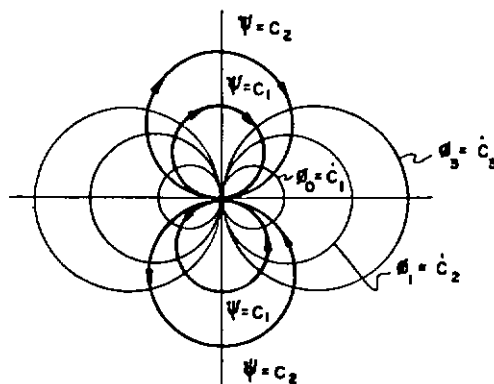


FIG. II.9 - Linhas de corrente e equipotenciais para um dipolo bi-dimensional.

Dos  $\Delta_S$  ABP e ABC vêm:

$$AB = v_2 \operatorname{sen} \alpha = 2a \operatorname{sen} \theta_1 \quad (11.1-62)$$

Quando  $a \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\sin \alpha \rightarrow \alpha$ ,  $r_2 \rightarrow r_1 \rightarrow r$   
e  $\theta_1 \rightarrow \theta_2 \rightarrow \theta$ ;

de onde, (11.1-62) se reduz (quando  $a \rightarrow 0$ ) a

$$r \alpha = 2 a \sin \theta \quad (11.1-63)$$

Substituindo (11.1-63) na equação da função de corrente para dipolo tem-se:

$$\psi = - \frac{q}{2\pi} \alpha = - \frac{q}{2\pi} \left( \frac{2 a \sin \theta}{r} \right) \quad (11.1-64)$$

Quando  $a = 0$ ,  $\psi = 0$ , no entanto, a medida que  $a \rightarrow 0$ , supõe-se que  $q$  cresce, de tal forma que  $2 q a$  permaneça sempre constante  $2 q a = \text{constante} = m$ .

$m$  = intensidade do dipolo, logo:

$$\psi = - \frac{m \sin \theta}{2 \pi r} \quad (11.1-65)$$

#### 11.1-12-1 - Cálculo da Função Potencial para o Dipolo

$$\text{Sabemos que } \psi = - \frac{m \sin \theta}{2 \pi r}$$

e que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \therefore \phi = \int \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} dr + f(\theta) \quad (11.1-66)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - r \frac{\partial \psi}{\partial r} \therefore \phi = - \int r \frac{\partial \psi}{\partial r} d\theta + g(r) \quad (11.1-67)$$

integrando (11.1-66), tem-se:

$$\phi = \frac{m \cos \theta}{2 \pi} + f(\theta) \quad (11.1-68)$$

por sua vez, integrando (11.1-67) vem:

$$\phi = \frac{m \cos \theta}{2 \pi r} + g(r) \quad (11.1-69)$$

Comparando-se (11.1-68) e (11.1-69) conclui-se que

$$g(r) = f(\theta) = 0$$

o que resulta

$$\phi = \frac{m \cos \theta}{2 \pi r} \quad (11.1-70)$$

como

$$\phi = \frac{m \cos \theta}{2 \pi r}$$

as linhas de potencial constantes ( $K$ ) são dadas por

$$K = \frac{m \cos \theta}{2 \pi r} \quad \text{como} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

vem:

$$x^2 + y^2 - \frac{m}{2 k \pi} x = 0 \quad (11.1-71)$$

que é a equação de uma circunferência para  $\psi = \frac{m \sin \theta}{2 \pi r}$ , de maneira análoga vem:

$$\frac{m \sin \theta}{2 \pi r} = C \quad C = \text{linha de corrente constante}$$

donde

$$x^2 + y^2 - \frac{m y}{2 \pi C} = 0 \quad (11.1-72)$$

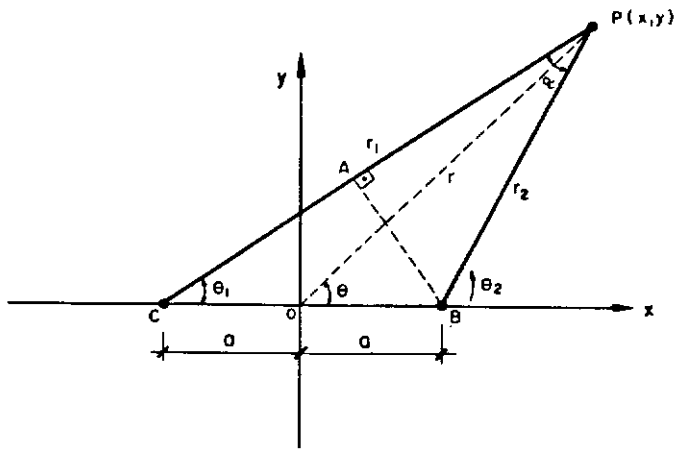


FIG. II.10 - Dipolo

### II.1-13 - DIPOLO NUM ESCOAMENTO RETILÍNEO

É um caso limite da oval de Rankine <sup>160</sup>, como na Seção (II.1-10), faz-se surgir um contorno fechado, que simulará a forma de um corpo.

Seja a composição dos dois escoamentos

$$\psi = \psi_{e.r.u} + \psi_{dipolo}$$

em coordenadas polares tem-se:

$$\psi = u r \sin \theta - \frac{m \sin \theta}{2 \pi r} \quad (II.1-73)$$

da experiência da oval de Rankine tem-se que no contorno do corpo deve ser zero, isto é,  $\psi = 0$

logo:

$$0 = u r \sin \theta - \frac{m \sin \theta}{2 \pi r}$$

que resulta

$$r = R = \sqrt{\frac{m}{2\pi u}} \quad (11.1-74)$$

$R$  = raio do corpo.

Como o radicando é constante, conclui-se que a figura geométrica assim obtida é uma circunferência ( $R = \text{constante}$ ).

$\psi$  também pode ser expresso em função de  $R$  e não mais de  $m$ ., isto é:

$$\psi = u r \sin \theta - \frac{2\pi u R^2 \sin \theta}{2\pi}$$

$$\boxed{\psi = u \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta} \quad (11.1-75)$$

para a velocidade tem-se:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = u \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (11.1-76)$$

$$v_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = - u \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (11.1-77)$$

com:  $r = R$ ,  $v_r = 0$  e  $v_\theta = -2u \sin \theta$ , vem:

para  $\theta = \frac{\pi}{2}$   $v_\theta$  é máximo e  $= 2u$  (dobro de  $u$ )

para  $\theta = \frac{\pi}{6} \rightarrow v_\theta = u \equiv$  a velocidade que existe no escoamento sem perturbação:

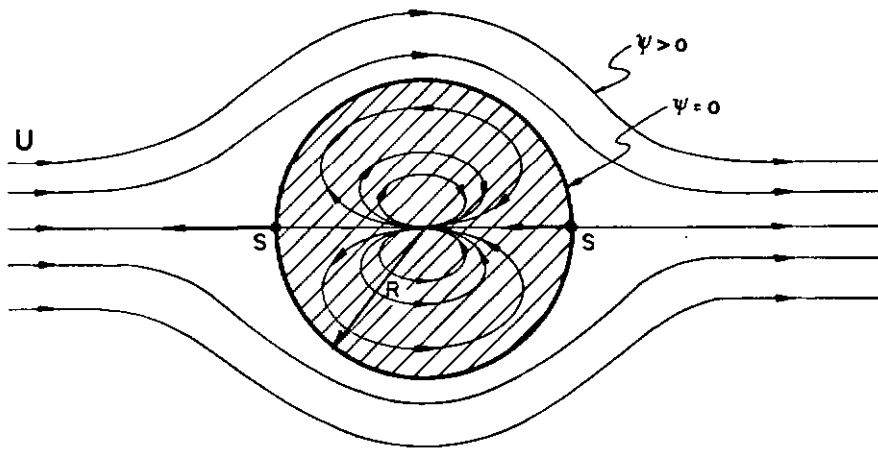


FIG. II. 11 - Área física de interesse prático (cilindro virtual) gerada pela composição de escoamentos.

para

$$r = \infty$$

$$u = U, v = 0$$

por outro lado:

$$\phi = -u \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad (II.1-78)$$





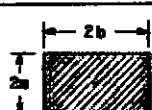
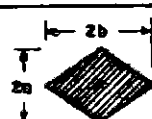
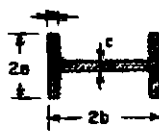

Destes resultados, como de outras constatações obtidas em seções anteriores, pode-se concluir que:

- a) A área de interesse físico encontrado é um círculo de raio

$$R = \left( \frac{m}{2\pi u} \right)^{1/2}$$

- b) Se escolhido o interior do círculo para representar um cilindro sólido, limitado pela linha da corrente que passa pelos pontos de estagnação, obter-se-ia para as Linhas da corrente a configuração mostrada na Figura II-11.

TABELA 1 — Massa adicional introduzida pelo fluido  
(Ref. 41)

SEÇÃO TRANSVERSAL	FORMA DO CORPO	MASSA ADICIONAL POR UNIDADE DE COMPR. - Mod DIREÇÃO DO MOV																					
	CÍRCULO	$\rho \pi a^2$																					
	ELIPSE	$\rho \pi b^2$																					
	ELIPSE	$\rho \pi a^2$																					
	PLACA	$\rho \pi w^2$																					
	RETÂNGULO	<table><tr><td>a/b</td><td></td></tr><tr><td>∞</td><td>1.00 <math>\rho \pi a^2</math></td></tr><tr><td>10</td><td>1.14 "</td></tr><tr><td>5</td><td>1.21 "</td></tr><tr><td>2</td><td>1.38 "</td></tr></table>	a/b		∞	1.00 $\rho \pi a^2$	10	1.14 "	5	1.21 "	2	1.38 "	<table><tr><td>a/b</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td>1.91 <math>\rho \pi a^2</math></td></tr><tr><td>0.5</td><td>1.70 "</td></tr><tr><td>0.2</td><td>1.98 "</td></tr><tr><td>0.1</td><td>2.23 "</td></tr></table>	a/b		1	1.91 $\rho \pi a^2$	0.5	1.70 "	0.2	1.98 "	0.1	2.23 "
a/b																							
∞	1.00 $\rho \pi a^2$																						
10	1.14 "																						
5	1.21 "																						
2	1.38 "																						
a/b																							
1	1.91 $\rho \pi a^2$																						
0.5	1.70 "																						
0.2	1.98 "																						
0.1	2.23 "																						
	LOSANGO	<table><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>0.85 "</td></tr><tr><td>1</td><td>0.78 "</td></tr><tr><td>0.5</td><td>0.67 "</td></tr><tr><td>0.2</td><td>0.61 "</td></tr></table>			2	0.85 "	1	0.78 "	0.5	0.67 "	0.2	0.61 "											
2	0.85 "																						
1	0.78 "																						
0.5	0.67 "																						
0.2	0.61 "																						
	PERFIL I a/c = 2.6 b/c = 3.6	$2.11 \rho \pi a^2$																					
 n Lados	POLÍGONO REGULAR OU	<table><tr><td>n =</td><td>3</td><td>0.654 <math>\rho \pi a^2</math></td></tr><tr><td></td><td>4</td><td>0.787 "</td></tr><tr><td></td><td>5</td><td>0.823 "</td></tr><tr><td></td><td>6</td><td>0.867 "</td></tr><tr><td></td><td>∞</td><td>1.000 "</td></tr></table>		n =	3	0.654 $\rho \pi a^2$		4	0.787 "		5	0.823 "		6	0.867 "		∞	1.000 "					
n =	3	0.654 $\rho \pi a^2$																					
	4	0.787 "																					
	5	0.823 "																					
	6	0.867 "																					
	∞	1.000 "																					



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | <sup>1</sup> | ABRAMSON, H. NORMAN. Hydroelasticity Some Problems and Some Solutions. In: Proceedings Fluid-Solid Interaction Symposium, Pennsylvania, ASME, Nov. 1967 - pp. 189-192, 210-212.
- | <sup>2</sup> | ASHLEY, H. and S. C. Mc Intosh. Expanding the Conciousness of the Aeroelasticity. In: Proceeding Fluid-Solid Interaction Symposium. Pennsylvania, ASME, Nov. 1967, pp. 120-143.
- | <sup>3</sup> | BALL, DAVID J. Simulation of Piers in Hydraulic Models. J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Div. ASCE, (WW1): February 1974 - pp. 23-35.
- | <sup>4</sup> | BELYTSCH'KO, T.; Methods and Programs for Analysis of Fluid-Structure System. Nuclear Engineering and Des., 42: North-Holland Publishing Company - pp. 1-186.
- | <sup>5</sup> | BELYTSCHKO, T.; KENNEDY, J. & SCHOEBERLE, D.F.- Quasi-Eulerian Finite Element Formulation for Fluid-Structure Interaction - J. Press. Vessel Technology, 621 (102): February 1980.
- | <sup>6</sup> | BERKHOFF, J.C.W. - Computation of Combined Refraction-Diffraction. In: International Conference on Coastal Engineering, 13, Vancouver, July 1972 - Publ. Nº 119.
- | <sup>7</sup> | BICKLEY, W.G. et All - Bessel Function. Mathematical Tables, 10 (2), 1960.
- | <sup>8</sup> | BISHOP, R.E.D.; PRICE, W.G & TAM, P.K.Y.- Hydrodynamic Coefficients of Some Heaving Cylinders of Arbitrary Shape. Int. J. Num. Meth. Engineering-13:pp.13-17,33-1978.
- | <sup>9</sup> | BISPLINGHOFF, R.L.; ASHLEY, H. and HLFMAN, R. L. - Aeroelasticity - U.S.A., Addison-Wesley, 1957

- | <sup>10</sup> | BLESSMANN, J. - Ação do Vento em Estruturas Marítimas.  
In: Simpósio Sobre Tendências Atuais no Projeto e Execução de Estruturas Marítimas (Publicação Preliminar) Julho de 1978 - Vol. 1.
- | <sup>11</sup> | BLESSMANN, J. - Aerodinâmica Aplicada a Engenharia Civil  
São Leopoldo, R. S., Faculdade de Economia do Vale do Rio dos Sinos - 1970
- | <sup>12</sup> | BLEVINS, R. D. - Flow-Induced Vibration - Van Nostrand Reinhold CO. - N. Y. - 1977
- | <sup>13</sup> | BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A.; LIMA, J. ; EDSON, P. D. - Análise Estrutural de Plataformas Marinas SIJAS - Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, 18, Salvador, Dezembro de 1976.
- | <sup>14</sup> | BREBBIA, C. A. - The Response of Off-Shore Structural to Random Waves - In: Seminário Sobre Hidrodinâmica Computacional - Porto Alegre, UFRGS, Abril de 1975, pp. K3 - K 46.
- | <sup>15</sup> | BREBBIA, C. A. - Vibrations of Engineering Structures. Southampton, Computational Mechanics Ltd., 1976 - pp. 298-328, 364-386.
- | <sup>16</sup> | BREBBIA, C. A, and WALKER, S. - Dynamic Analysis of Off-Shore Structures - Lond, Butterworth, 1979.
- | <sup>17</sup> | BTCHELOR, G.K. - An Introduction to Fluid Dynamics - U. K., Cambridge, 1967 - pp. 398-471, 507-543.
- | <sup>18</sup> | BUSHNELL, M. J. - Forces on Cylinder Arrays in Oscillating Flow. In: Off-Shore Technology Conference, OTC. 2903, May 1977 - pp. 193.
- | <sup>19</sup> | CARNEIRO, F.L.L.B. - Alguns Aspectos da Análise Dimensional Aplicada à Teoria e à Experimentação de Platafor

mas "Off-Shore" - Pré-Printed: International Symposium  
on Off-Shore Structures - COPPE/UFRJ, Brazil, 1981

- [ <sup>20</sup> ] CHAKRABARTI, S.K. - Comments on Second-Order Wave Effects  
on Large-Diameter Vertical Cylinder - J. Ship Res., 22  
(4): 266-268 - December 1978.
  
- [ <sup>21</sup> ] CHAKRABARTI, S.K. and COTTER, D. C. - Motion Analysis of  
Articulated Tower - J. Waterway, Port Coastal Ocean  
Div., ASCE - (WW3): 281-293, August 1979
  
- [ <sup>22</sup> ] CHAKRABARTI, S. K. - Nonlinear Wave Forces on Large Off-  
-Shore Structures - J. Waterways Harbours Coastal En-  
gineering, ASCE - (WW4): , November 1977
  
- [ <sup>23</sup> ] CHAKRABARTI, S. K. - Nonlinear Wave Forces on Vertical  
Cylinder - Journal of the Hydraulic Division - ASCE -  
98 (11): 1895 - 1909, November 1972
  
- [ <sup>24</sup> ] CHAKRABARTI, S. K - Second-Order Wave Force on Large Ver-  
tical Cylinder - 101 (WW3): 311-17, August 1975.
  
- [ <sup>25</sup> ] CHAKRABARTI, S. K. - Wave Forces on Submerged Objects of  
Symmetry - J. of Harbours and Coastal Eng. Division -  
Proc. ASCE - (WW2): 9698, Lay 1973
  
- [ <sup>26</sup> ] CHAKRABARTI, S.K. and NAFTZGER, R.A. - Nonlinear Wave For-  
ces on Half Cylinder and Hemisphere - Journal of the  
Waterways Harbours and Coastal Eng. Division - ASCE -  
(WW3): 10710, pp. 189-204, August 1974
  
- [ <sup>27</sup> ] CHAKRABARTI, S.K. and TAM, W. A. - Wave Height Distribution  
Around Vertical Cylinder - Journal Waterways, Harbours  
and Coastal Eng. Division - ASCE, 101 (2): pp.225-230,  
May 1975.
  
- [ <sup>28</sup> ] CHAKRABARTI, S. K. - Wave Forces on Vertical Circular Cy-  
linder - J. Waterways Harbours Coastal Eng. Div.-ASCE-

(WW4): pp. 567-568 - May 1976.

- | <sup>29</sup> | CHAPLIN, J. R. - Developments of Stream-Function Wave Theory - In.: Coastal Engineering, 3, pp.179-205 - 1980
- | <sup>30</sup> | CLAUSS, G. and Sükan, M. - Drift Forces on Compact Off Shore Structures in Different Water Depths. - Pre-Printed: International Symposium on Offshore Structures - COPPE/UFRJ - Brazil - 1981.
- | <sup>31</sup> | CLONGH, R. and PENZIER, J. - Dynamics of Structures - McGraw-Hill/Kogakusha - 1975
- | <sup>32</sup> | CONNOR, J.J. and BREBBIA, C. A. - Finite Element Techniques for Fluid Flow - London, Newnes-Butterworths - Cap. 4, 5, 9 - 1976
- | <sup>33</sup> | CRONIN, D. J. and GALGOUL, N. S. - Técnicas Computacionais para Análise Dinâmica de Plataformas Marítimas Fixas em Águas Profundas - In: Seminário de Uso de Computador na Engenharia e na Gerência de Implantação de Empreendimentos Industriais, 1, Rio de Janeiro, 1981
- | <sup>34</sup> | DAILEY, J. E. and STOKES V - Wave Computation in Deep Water - Journal Waterway Port. Coastal Ocean Division, Proc. ASCE, 104(4): Technical Notes, November 1978
- | <sup>35</sup> | DAILY, J. W. and HARLEMAN, D. R. F. - Fluid Dynamics - Massachusetts, Addison-Wesley, 1966 - Chapter 15, pp. 369-412.
- | <sup>36</sup> | DEAN, R. G. - Relative Validities of Water Waves Theories - J. Waterways Harbours Division - ASCE, 96(1): 105-119, February 1970.
- | <sup>37</sup> | DIXON, A. G.; GREATER, C. A. and SALTER, S. H. - Wave Forces on Partially Submerged Cylinders - Journal of the Wat. Port Coastal and Ocean Division - Proc. - ASCE -

(WW4): 14996, pp.421-437, November 1979

- | <sup>38</sup> | DOWELL, E. J. - Nonlinear Analysis of the Flutter of Plates and Shells. - Inc. Proceeding Fluid-Solid Interaction Symposium - Pennsylvania, ASME, pp. 160-186, November 1967.
- | <sup>39</sup> | DUBOIS, J. J. and ROUVRAY, A. L. - An Improved Fluid Superelement for the Coupled Solid-Fluid Surface Wave Dynamic Interaction Problem - Earthquake Engineering Structural Dynamic, 6: 235-45, 1978.
- | <sup>40</sup> | DUNGAR, R. - An Efficient Method of Fluid-Structure Coupling in the Dynamic Analysis of Structures. International Journal Num. Method Engineering, 13: 93-107, 1978.
- | <sup>41</sup> | DYNAMICS of Marine Structures - 2. Ed. London: CIRIA Underwater Engineering Group, Report UR8, 1978.
- | <sup>42</sup> | EBCKEN, N. F. F. - Análise Transiente de Sistemas Estrutura-Fluido. In: Congresso Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 1. Simpósio Sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, 3, Porto Alegre, UFRGS, Vol. 1, pp. 153-165, 1979.
- | <sup>43</sup> | EDGE, B. L. and MAYER, P. G. - Dynamic Structure Soil-Wave Model for Deep Water - J. Waterways, Harbours Coastal Engineering Division, ASCE, (WW1):pp.: 167-185 - Feb. 1971.
- | <sup>44</sup> | EIMS, D. and SCHMID, W. E. - Structural Action of Pile Cluster Dolphins - J. Waterways Harbors Division, ASCE, (WW4): pp. 11-29, November 1965.
- | <sup>45</sup> | EVANS, D. J. - Analysis of Wave Force Data - In: Annual Offshore Technology Conference, 1 - Houston, Texas - Proceedings, pp. 51-70 - May 1969.
- | <sup>46</sup> | FERRANTE, A. J. et all. Imprecisões no Cálculo de Forças

de Ondas em Estruturas Off-Shore. In: Congresso Latinoamericano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 2. - Simpósio Sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, 4, Curitiba, 1980 - Anais ... - Curitiba, Associação Latinoamericana para Métodos Computacionais em Engenharia, Vol. 1, pp. 327-335, 1980.

- | <sup>47</sup> | FERRANTE, A. J.; LIMA, E. and BREBBIA, C. A. - Análisis Estructural de Plataformas Marinas Fijas - Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estructural, Salvador, de 06 a 11 de dezembro de 1976.
- | <sup>48</sup> | FERRANTE, A. J; LIMA, E. C. P. and EBCKEN, N. F. - Sistemas Computacionais para Análise Estructural. In: Simpósio Sobre Tendências Atuais no Projeto e Execução de Estruturas Marítimas (Publicação Preliminar)- Vol. 1, Julho de 1978.
- | <sup>49</sup> | FIALHO, G. D. M. and SPHALER, S. H. - Determinação dos Campos de Velocidades e Acelerações devido as Ondas do Mar - In: Congresso Panamericano de Ingenieria Civil, Transportes Marítimo e Ingenieria Portuária - Veracruz, pp. 1-14, September 1979.
- | <sup>50</sup> | FISCHER, D. - Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks - Earthquake Engineering Structure Dynamic - 7: pp. 587-601, 1979.
- | <sup>51</sup> | FOLTINSEN, O. and FINN, M. C. - Hydrodynamics Forces Acting on Drilling Platforms - Rio de Janeiro, COPPE, (Publicação Didática Nº 474) - Setembro de 1974.
- | <sup>52</sup> | FRENCH, A. P. - Vibrations and Waves. New York, W.W. Norton, 1971 - Cap. , pp. (MIT Introductory Physics Series).
- | <sup>53</sup> | GALLAGHER, R. H. et all - Finite Elements in Fluids. U. K. - John Wiley & Sons, Vol. 1, pp. 219-231, 251-279, 1975.

- | <sup>54</sup> | GALVIN, G. J. and HALLEMEIER, R. J. - Wave Runup on Vertical Cylinders - Proceedings International Conference on Coastal Engineering, 13, Vancouver, ASCE, pp.1955-1974, 1972.
  
- | <sup>55</sup> | GANDOLFO, A. C.B. et all - Implantação de um Sistema de Projeto e Análise Estrutural de Plataformas Oceânicas Fixas. In: Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval, 7, Rio de Janeiro, 1978.
  
- | <sup>56</sup> | GARRINSON, C. J. and CHOW, P. - Waves Forces on Submerged Bodies - J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Division - ASCE - pp. 375-407, August 1972.
  
- | <sup>57</sup> | GARRINSON, C. J. - Nonlinear Wave Forces on Vertical Cylinder - J. Waterways Harbors, Coastal Engineering Division - ASCE - pp. 1196-1198, July 1973.
  
- | <sup>58</sup> | GARRISON, C. J. and RAO, V. - Seetharama Interaction of Waves with Submerged Objects. J. Waterways, Harbors Costal Engineering Division, pp. 259-441, May 1971.
  
- | <sup>59</sup> | GENATIOS, C. - Análise Dinâmica de Estruturas Sujeitas a Cargas de Onda - Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1981.
  
- | <sup>60</sup> | GERGES, S. N. Y. and PINTO, J. C. S. - Fluid - Structure Coupling for a Vibrating Cylindrical Shell in Compressible Fluid - 'Pre-Printed': International Symposium on Offshore Structures - COPPE/UFRJ, Brazil, 1981.
  
- | <sup>61</sup> | GREENSPON, J. E. - Fluid-Solid Interaction - In: Proc. Symp. Fluid-Solid Interaction, Pittsburgh, Pennsylvania, - ASME - 1967.
  
- | <sup>62</sup> | HAMDI, M. A.; OUSSET, Y. and WERCHERY, G. - A Displacement Method for the Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems - Int. J. Num.Method. Engineering, 13: pp. 139-150, 1978.

- | <sup>63</sup> | HAVELOCK, T. H. - Forced Surface-Waves on Water - Philos. Magaz. 8: pp. 304-311, October 1929.
- | <sup>64</sup> | HAVELOCK, T. H. - The Pressure of Water on a Fixed Obstacle - Proc. Royal Soc. London-A, 175: pp. 409-421, 1940
- | <sup>65</sup> | HAWTHORNE, W. R. - The Applicability of Secondary flow Analysis to the Solution of Internal flow Problems - Proc. of the Symposium on the Fluid Mechanis of Internal flow - G. M. Laboratories-Wanen, Michigan, pp. 238-265, 1965.
- | <sup>66</sup> | HOGGEN, N. et all - Estimation of Fluid Loading on Off-Shore Structures. Proc. Inst. Civil Engs., Part 2, pp. 512-562, 1977.
- | <sup>67</sup> | HSU, M. H.H. L and FARIAS, F. M. - On the Design and Dynamical Analysis of a Riser - 'Pre-Printed': International Symposium on Off-shore Structures - COPPE/UFRJ - Brazil, 1981.
- | <sup>68</sup> | IPPEN, A. T- Estuary and Coastline Hydrodynamics - New York, Mc Graw-Hill, pp. 1-89, 341-396, 1966.
- | <sup>69</sup> | INTERNATIONAL Symposium on Offshore Structures, 2<sup>nd</sup>, COPPE/UFRJ, Pentech Press - London, 1977.
- | <sup>70</sup> | INTERNATIONAL Symposium on Offshore Structures, 2<sup>nd</sup>, COPPE/UFRJ, Pentech Press - London, 1979.
- | <sup>71</sup> | ISAACSON, M. St. Q. - Nonlinear Inertia Forces on Bodies - J. Waterways Port Coastal Ocean Division, ASCE-(WW3): pp. 213-227, August 1979.
- | <sup>72</sup> | ISAACSON, M. St. Q. - Nonlinear Wave Forces on Large Offshore Structures - J. Waterways Port Coastal Ocean Division - ASCE - 103 (WW1): pp. 69-82, February 1979.



- | <sup>73</sup> | ISAACSON, M. St. Q. - Shallow Wave Diffraction Around Large Cylinder - J. Waterways Port Coastal Ocean Division, (WW1): pp. 69-82, February 1977.
- | <sup>74</sup> | ISAACSON, M. St. Q. - Wave Runup Around Large Circular Cylinder - J. Waterways Port Coastal Ocean Division - ASCE - (WW1): pp. 69-79, February 1978.
- | <sup>75</sup> | JEN, Y. - Laboratory Study of Inertia Forces on a Pile - J. Waterways Harbors Division - ASCE, pp. 59-77, Feb., 1968
- | <sup>76</sup> | JEN, Y. and LIN, P.M - Plunging Wave Pressures on Semi-Cylindrical Tube - J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Division - ASCE - (WW3): pp. 567-579, Aug. 1971.
- | <sup>77</sup> | JEN, Y. and SKJELBREIA, L - Nonlinear Wave Force on Vertical Cylinder - (HY11): 2135/6 - November 1973.
- | <sup>78</sup> | JENSSEN, D. N. and HJERTAS, B. - Gravity Platform Tower Vibration - In: Offshore Technology Conference - pp. 209-212, Houston, Texas, OTC 2905, 1977.
- | <sup>79</sup> | JUNGER, M. C. - Normal Modes of Submerged Plates and Shells - In: Proceedings Fluid-Solid Interaction Symposium - Pennsylvania, ASME - pp. 79-119, November 1967.
- | <sup>80</sup> | KAMEL, A. M. S. Shock Pressure on Coastal Structures - J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Division - ASCE - (WW3): pp. 689-699, August 1970
- | <sup>81</sup> | KENLEGAN, G. H. and CARPENTER, L. H. - Forces on Cylinders and Plates in on Oscillating Fluid - J. Research Nat. Bureau Standards, 60(5): pp. 423-440, May 1958.
- | <sup>82</sup> | KHASKHACHIKH, G. D. and VANCHAGOV, O. M. - Regular Wave Effects on Walls Made of Cylinders - J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Division - ASCE - (WW4): pp. 735-54, November 1971.

- | <sup>83</sup> | KING, R. - Vortex Excited Structural Oscillations of a Circular Cylinder in Steady Currents - In: Offshore Technology Conference, Dallas, OTC 1948 - May 1979.
- | <sup>84</sup> | KINSMAN, B. - Wind Waves - New Jersey, Prentice-Hall, pp. 51-167, 1965.
- | <sup>85</sup> | KJEIDSEN, S. P. and MYRHAUG, D. - Breaking Waves in Deep Water and Resulting Wave Forces. In: Offshore Technology Conference - OTC 3646 - pp. 2215-2218, Houston, Texas, April 1979.
- | <sup>86</sup> | KOCHIN, N. E.; KIBEL, I. A. and ROZE, N. V. - Theoretical Hydromechanics - 2 Ed. New York, John Wiley, 1965.
- | <sup>87</sup> | KOKKINOWRACHOS, K.; AACHEN, V. and HILCKENS, H. - Hydrodynamic Analysis of Cylindrical Offshore Oil Storage Tanks. Offshore Technology Conference, Houston, 1979.
- | <sup>88</sup> | KOKKINOWRACHOS, K. and WILCHENS, H. - Hydrodynamic Analysis of Cylindrical Offshore Oil Storage Tanks. In: Offshore Technology Conference - OTC 1944 - Dallas, May 6-8, 1974.
- | <sup>89</sup> | KRAJCINOVIC, D. and CAREY, J. J. - Fluid-Solid Interaction of Reactor Core Components - A Preliminary Analysis - Nuclear Engineering and Design, 31: pp. 87-94, North-Holland, 1974.
- | <sup>90</sup> | KRIEG, R. - Coupled Problems in Transient Fluid and Structural Dynamics in Nuclear Engineering - Appl. Math. Model., 2: pp. 81-98, June 1978.
- | <sup>91</sup> | LACROIX, R. - Second Generation Concrete Gravity Platforms - 'Pre-Printed': International Symposium on Offshore Structures - COPPE/UFRJ, Brazil, 1981.
- | <sup>92</sup> | LAIRD, A. D. K. - Flexibility in Cylinder Groups Oscil

lated in Water - J. Waterways Harbors Division - ASCE, (WW3): pp. 69-85, August 1966.

- [<sup>93</sup>] LAIRD, A. D. K. and WARREN, R. P. - Groups of Vertical Cylinders Oscillating in Water - Journal Engineering Mechanics Division - ASCE - (EM-1): pp.25-34, Feb. 1963.
- [<sup>94</sup>] LAMB, H. - Hydrodynamics - 6 Ed. New York, Dover, 1945.
- [<sup>95</sup>] LANDAU, L. et all - Análise Dinâmica de Estruturas Off-Shore. In: Seminário de Uso de Computador na Engenharia e na Gerência de Implantação de Empreendimentos Industriais, 1, Rio de Janeiro, 1981.
- [<sup>96</sup>] LAVRENTIEV, M. and CHABAT, B. - Effets Hydrodynamiques et Modèles Mathématiques - MIR, 1980, pp. 13-46, 150-160, 166-169.
- [<sup>97</sup>] LEVI, E. - Mecanica de los Fluidos - 12 Ed. - Univ. Nac. Aut. México - Capítulos IV, VII, VIII, 1965.
- [<sup>98</sup>] LIAW, C. Y. and CHOPRA, A. - Earthquake-Response of Axisymmetric Tower Structure Surrounded by Water - Report N° EERC 73-25, Berkeley, University of California, October 1973.
- [<sup>99</sup>] LIMA, E. C. P. - Lorane-Dina: Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas - Rio de Janeiro - Tese de Doutorado - COPPE/UFRJ - 1977.
- [<sup>100</sup>] LYON, R. H. - Fluid-Loading Effects on Vibrating Structures. In: Proceedings Fluid-Solid Interaction Symposium, Pennsylvania - ASME - pp. 68-78, November 1967.
- [<sup>101</sup>] Mac CAMY, R. C. and FUCHS, R. A. - Wave Forces on Piles: A Diffraction Theory . Beach Erosion Board Technical Memo., N° 69, pp. 01-17, 1954.

- [<sup>102</sup>] MacCORMICK, M. E. - Ocean Engineering Wave Mechanics - U.S.A. - John Wiley & Sons, 1973.
- [<sup>103</sup>] MacLACHLAN, N. W. - Bessel Function for Engineers - 2 Ed. Oxford at the Cearendon Press, 1955.
- [<sup>104</sup>] MARCUS, M. S. - A Finite Element Method Applied to the Vibration of Submerged Plates - J. Ship Res., 22 (2): pp. 94-99, June 1978.
- [<sup>105</sup>] MARTHA, L.F.C.R. - Forças de Ondas Sobre Elementos Imersos - Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp. 11, 13, 20 e 30, Tese de M. Sc. - Março de 1980.
- [<sup>106</sup>] MARTIN, H. C. - Finite Element Analysis of Fluid Flows - - AFFDL-TR-68-50, pp. 517-535.
- [<sup>107</sup>] MARTIN, M. and TULIN, M. P. - Hydroelasticity of Hydrofoils - In: Proceedings Fluid-Solid Interaction Symposium - Pensylvania - ASME - pp. 241-265, November 1967.
- [<sup>108</sup>] MATTEN, R. B. - The Influence of Surface Roughness Upon the Drag of Circular Cylinders in Waves - In: Offshore Technology Conference, OTC 2902, pp. 185-194, May 1977
- [<sup>109</sup>] MÉHAUTE, B. - An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves - New York, Springer Verlag, 1976.
- [<sup>110</sup>] MÉHAUTE, B. - Similitude in Coastal Engineering - J.Waterways Harbors Coastal Engineering Division - ASCE - (WW3): pp. 317-335, August 1976.
- [<sup>111</sup>] MEI, C. C. - Coastal Wave Hydrodynamics - MIT-Summer Course, Vol. II, Capítulo IV - Massachussetts Institute Technology, 1976.
- [<sup>112</sup>] MEI, C.C.; FODA, M. A. and TONG, P. - Exact and Hybrid-Element Solutions for the Vibration of a Thin Elastic

Structure Seated on the Sea Floor - Appl. Ocean Res.,  
-1(2): pp. 79-88, 1979.

- [<sup>113</sup>] MEI, C.C, and YVE, D. K. T. - Some Properties of Hybrid Elements Methods for Waterwaves - Int. Journal, Num. Meth. Engineering, 14 (16): pp. 1627-1641, 1979.
- [<sup>114</sup>] MENTE, L. J. and FRENCH, F. W. - Response of Elastic Cylinders to Plane Shear Waves - Journal Engineering Mechanics Division - ASCE - pp. 103-118, 1964.
- [<sup>115</sup>] MORAND, H. and OHAYON, R. - Substructure Variational Analysis of the Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems. Finite Element Results. Int. Journal Num. Meth. Engineering, 14: pp. 741-755, 1979.
- [<sup>116</sup>] MORRISON, J. R. et all - The Force Exerted by Surface Waves on Piles - Petroleum Trans., AIME - 189, 1950.
- [<sup>117</sup>] MORSE, P. N. - Vibrations and Sound - 2 Ed. U.S.A., McGraw-Hill, 1948.
- [<sup>118</sup>] MUGA, B. J. and WILSON, J. F. - Dynamic Analysis of Ocean Structures - New York, Plenum Press, 1970.
- [<sup>119</sup>] NAGAI, S. - Wave Forces on Structures - Chow, Ven Te - Advances in Hydrosience - New York, Academic Press, Vol. 9 - pp. 253-323, 1973.
- [<sup>120</sup>] NAGATO, Y. - Análise Experimental de Estruturas e Componentes de Obras Marítimas - In: Simpósio Sobre Tendências Atuais no Projeto e Execução de Estruturas Marítimas (Publicação Preliminar) - Vol. 2, Julho de 1978
- [<sup>121</sup>] NATARAJA, R. and KIRK, C. L. - Dynamic Response of a Gravity Platform Under Randon Wave Forces. In: Offshore Technology Conference - OTC 2904 - Houston, May 1977.

- |<sup>122</sup>| NATH, B. - Dynamics of Structures Fluid Systems - CHOW, Ven te - Advances in Hydrosience - New York, Academic Press, Vol. 9, pp. 85-117, 1973.
- |<sup>123</sup>| NAUDASCHER, E. (Editor) - Flow-Induced Structural Vibrations - Symposium Karlsruhe. (Germany) - I. U. T. A.M. - I.A.H.R. - Springer-Verlag - New York, 1974.
- |<sup>124</sup>| OCHI, M. K. - Ship Slamming - Hydrodynamic Impact Between Waves and Ship - In: Proceedings Fluid-Solid Interaction Symposium - Pennsylvania - ASME - pp. 223-240, Nov. 1967.
- |<sup>125</sup>| PETIAN, G. - La Theorie des Fonctions de Bessel - Paris, Center National de La Recherche Scientifique, 1955.
- |<sup>126</sup>| PRANDTL, L. and TIETJENS, O. G. - Applied Hydro and Aeromechanics - New York, pp. 86-143, Dover, 1934.
- |<sup>127</sup>| RAINS, C. P. and CHAKRABARTI, S. K. - Mechanical Excitation of Offshore Tower Model - J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Division - ASCE -(WW1): pp.35-47, Feb. 1972.
- |<sup>128</sup>| RAMAN, H. et all - Diffraction of Non-Linear Surface Waves by a Circular Cylinder - Acta Mech., 23: pp. 145-158, 1975
- |<sup>129</sup>| RAMAN, H.; JOTHISHANKAR, N. and VENKATANARASAI AH, P. - Non-Linear Wave Interaction with Vertical Cylinder of Large Diameter - Journal of Ship Research, 21(2): pp. 120-124, June 1977.
- |<sup>130</sup>| RAMAN, H.; PRABHAKARA R. G. V. and VENKATANA RASAI AH, P. - Diffraction of Nonlinear Surface Waves by a Circular Cylinder - Acta Mechanica, 23: pp. 145-158, 1975
- |<sup>131</sup>| RAMAN, H. and VENKATANARASAI AH, P. - Forces due to Nonlinear Waves on Vertical Cylinders - J. Waterways Harbors Coastal Engineering Division - ASCE - 9 (WW3): pp. 301-407, August 1976.

- [<sup>132</sup>] RAVARA, A. - Dinâmica de Estruturas - (Curso de Especialização) - Lisboa, LNEC, 1969.
- [<sup>133</sup>] RIVAS, M. H. C. - Análise da Resposta de Estruturas Off-shore Submetidas à Ação do Mar - Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ - Tese de M. Sc. - Março de 1981.
- [<sup>134</sup>] ROEHL, J. L. P. and BARROS, P. F. C. - Forças de Ondas Sobre Estruturas Marítimas - In: Congresso Latinoamericano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia , Porto Alegre, UFRGS, Vol. 1, pp. 39-53, 1979.
- [<sup>135</sup>] ROEHL, J. L. P. and MARTHA, L. F. C. R. - Cálculo de Força de Onda em Águas Profundas - In: Congresso Latinoamericano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 2. - Anais ... Curitiba, Vol. 1, pp. 311-326, 1980.
- [<sup>136</sup>] ROUSE, H. - Elementary Mechanics of Fluids - New York, John Wiley, Chapter 8 e 9, pp. 232-251, 271-288, 1946.
- [<sup>137</sup>] SABESKY, R. H.; ACOSTA, A. J. and HAUPTMANN, E. G.-2 Ed. Fluid Flow - New York, MacMillan - Chapter 6, pp.173-216, 1964.
- [<sup>138</sup>] SAINI, S.S.; BETTESS, P. and ZIENKIEWCZ, O.C. - Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity dams Using Finite and Infinite Elements - Earthquake Engineering Structure Dynamic, 6: pp. 363-374, 1978.
- [<sup>139</sup>] FOLTINSEN, O. M. - Description of Surface Waves Calculation of Wave Forces on Jackets and Semisubmersibles, Motions of Semisubmersibles - West European Graduate Education Marine Technology.
- [<sup>140</sup>] SALVESEN, N. and KERCZEK, C. V. - Nonlinear Aspects of Subcritical Shallow-Water Flow Past Two - Dimensional Obstructions - J. Ship Res., 22 (4): pp.203-211, December 1978.

- [<sup>141</sup>] SARPKEYA, T.; COLLINS, N. J. and EVANS, S. R. - Wave Forces on Rough-Walled Cylinders at High Reynolds Numbers - In: Offshore Technology Conference - OTC 2901- - pp.175-179, 1977.
- [<sup>142</sup>] SARPKEYA, T. and ISAACSON, M. - Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures - New York, Van Nostrand Reinhold, 1981.
- [<sup>143</sup>] SELBY, A. and SEVERN, R. T. - An Experimental Assessment of the Added Mass of Some Plates Vibrating in Water - Earthquake Structure Dynamic, 1: pp.189-200, 1972.
- [<sup>144</sup>] SELNA, L. and CHO, D. - Resonant Response of Offshore Structures - J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Division - ASCE - (WW1): pp. 15-25, February 1972.
- [<sup>145</sup>] SCHLICHTING, H. - Boundary-Layer Theory - 6 Ed. McGraw-Hill Book, 1979.
- [<sup>146</sup>] SCIBOR-RYLSKI, A. J. - Road Vehicle Aerodynamics - London, Pentech Press, 1975.
- [<sup>147</sup>] SENA, L. A. - Unidades de las Magnitudes Físicas y Sus Dimensiones - Moscú, MIR, 1979.
- [<sup>148</sup>] SEQUERA, C. G. - Alguns Aspectos da Análise Dinâmica de Estruturas Offshore - Rio de Janeiro - Tese - COPPE/UFRJ - 1981.
- [<sup>149</sup>] SHAMES, I. H. - Mechanics of Fluids - Tokyo, McGraw-Hill, Chapter 8, pp. 211-249 - 1962.
- [<sup>150</sup>] SHANTARAM, D.; OWEN, D. R. J. and ZIENKIEWICZ, O. C. - Dynamic Transient Behaviour of Two and Three Dimensional Structures Including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction - Earthquake Engineering Structure Dynamic, 4: pp. 567-578, 1976.



- |<sup>151</sup>| SHARAN, S. K. - An Efficient Method for the Finite Element Dynamic Analysis of Structure - Fluid - Foundation Systems - In: Congresso Latino Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 1. Simpósio Sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil, 3, Porto Alegre, 1979, Anais ... Porto Alegre, UFRGS, Vol.1, pp.215-234, 1979.
- |<sup>152</sup>| SHAW, T. L. and CHAPLIN, J. R. - On the Mechanics of Flow-Induced Periodic Forces on Structures. In: Proceedings Dynamic Waves in Civil Engineering, University College Swansea. Willey Interscience, pp. 73-140, July 1970.
- |<sup>153</sup>| SHIMAGO, T. and INUI, T. - Coupled Vibration of Many Elastic Circular Bars in Water, Proc. J.S.M.E., pp.495-505
- |<sup>154</sup>| SOMMERFELD, A. - Partial Differential Equations in Physics - New York, Academic Press, Vol. 1, pp.159-162, 1949.
- |<sup>155</sup>| SOUZA, M. A. - Análise Dinâmica de Estruturas Marítimas - Rio de Janeiro, PUC, (Tese), 1978.
- |<sup>156</sup>| SOTELINO, E. D. - Análise Experimental de Estruturas Marítimas - Rio de Janeiro, PUC, (Tese), 1980.
- |<sup>157</sup>| SPHAIER, S. H. - Aspectos Estatísticos e Hidrodinâmicos no Estudo da Ação da Onda Sobre Estruturas Offshore. In: Colóquio Brasil-Venezuela de Engenharia Civil, 1º, Anais ... 1980.
- |<sup>158</sup>| SPHAIER, S. H. - Determinação dos Campos de Velocidade e Aceleração Devido as Ondas do Mar. In: Congresso Panamericano de Engenharia Naval, Transportes Marítimos e Engenharia Portuária, México, Setembro de 1979.
- |<sup>159</sup>| SPHAIER, S. H. et al - Cálculo Automático de Forças de Ondas Sobre Estruturas Offshore. In: Congresso Latinoamericano Sobre Métodos Computacionais para Engenha

ria, 2, Anais ... Curitiba, Vol. 1, pp.353-369, 1980.

- |<sup>160</sup>| SPHAIER, S. H. - Hidrodinâmica - (Notas do Curso dado na COPPE/UFRJ) - Rio de Janeiro, Março/Junho de 1980.
- |<sup>161</sup>| STANDING, R. G. - Applications of Wave Diffraction Theory. Int.Journal Num. Meths. Engineering, 13: pp. 49-72, 1978.
- |<sup>162</sup>| STREETER, V. L - Fluid Dynamic - U.S.A., McGraw-Hill Book, Chapter VI, VII - 1948.
- |<sup>163</sup>| SUGAY, M.; ARANHA, J. A. e MARTINS, C. - Aplicação do "Hybrid Element Method" - na Análise de Mecanismo para Aproveitamento Energético das Ondas do Mar - Publicação do Agrupamento de Estruturas, Divisão de Engenharia Civil - IPT - São Paulo, 1979.
- |<sup>164</sup>| TABARROK, B. - Dual Formulations for Acousto - Structural Vibrations - Int. Journal Num. Method Engineering, 13: pp.197-201, 1978.
- |<sup>165</sup>| TAYLOR, E. R. and DUNCAN, P. E. - Fluid Induced Inertia and Damping in Vibrating Offshore Structures - Appl. Ocean Res., 2 (1): pp. 3-11, 1979.
- |<sup>166</sup>| TAYLOR, R. E. and WAITE, J. B. - The Dynamics of Offshore Structures Evaluated by Boundary Integral Techniques. Int. Journal Num. Method Engineering, 13: pp.73-92, 1978.
- |<sup>167</sup>| TOEBES, G. H. - Flow-Induced Structural Vibrations - J. Engineering Mech. Div. - ASCE - (EM6): pp. 39-66, Dec. 1965.
- |<sup>168</sup>| TRITTON, D. J. - Physical Fluid Dynamics - London - Van Nostrand Reinhold, pp. 19-29, 42-59, 94-100, 1977.
- |<sup>169</sup>| U. S. ARMY - Coastal Engineering Research Center - Shore Protection Manual - Vol. 1 and 2, pp. 2.1 - 2.62, 7.63- - 7.126.

- |<sup>170</sup>| VALLENTINE, H. R. - Applied Hydrodynamics - London - Butter Works, pp. 1-76, 102-30, 1959.
- |<sup>171</sup>| VAN OORTMERSEN, G. - Some Aspects of Very Large Offshore Structures - Netherlands Ship Model Basin, pp. 02-30.
- |<sup>172</sup>| VERLEY, R. L. P. and EVERY, M. J. - Wave Induced Vibrations of Flexible Cylinders. In: Offshore Technology Conference. OTC 2899 - pp. 167-170, Houston, 1977.
- |<sup>173</sup>| VIEIRE, R. C. C. - Atlas de Mecânica dos Fluidos - Estética - Cinemática e Dinâmica - Edgard Bluecher/USP, São Paulo, 1971.
- |<sup>174</sup>| WALKER, S. - Determination of the Wave Forces on Offshore Gravity Platforms, by Diffraction Theory and Spectral Analysis. University Southampton, December 1976.
- |<sup>175</sup>| WANG, C. Y.; CHANG, Y. and FISTEDIS, S. H. - Analysis of Nonlinear Fluid-Structure Interaction in LMFBR Containment. Nuclear Engineering Res., 49: pp.: 93-105, 1978.
- |<sup>176</sup>| WATSON, G. N. - A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2 Ed. - University Press, Cambridge, 1966.
- |<sup>177</sup>| WEGGEL, J. R. - Maximum Breaker Height - J. Waterways, Harbors Coastal Engineering Div. - ASCE - (WW4): pp. 529-548 - November 1972.
- |<sup>178</sup>| WEHAUSEN, J. and LAITONE, E. - Surface Waves - Handbuch der Physik, Springer-Verlag, pp. 446-778, Berlin, 1960.
- |<sup>179</sup>| WELLS, J. M. G. and TACHIBANA, T-T. - Metodologia de Ensaio de Estruturas "Off-Shore". In: Congresso Nacional de Transportes Marítimos e Construção Naval, 7. Rio de Janeiro, 1978.
- |<sup>180</sup>| WIEGEL, R. L. - Oceanographical Engineering - Prentice-

-Hall, 1964.

- |<sup>181</sup>| WIEGEL, R. L. - Waves and Their Effects on Pile-Supported Structures.
- |<sup>182</sup>| YEH, H-C. - Method of Solving the Potential Field in Complicated Geometries and the Potential Flow in the Lower Plenum of a Pressurized Water Reactor - Nuclear Engineering Des., 32: pp. 85-104, 1975.
- |<sup>183</sup>| ZIENKIEWICZ, O. C.; LEWIS, R. W. and STAGG, K. G. - Numerical Methods in Offshore Engineering - Chapter I, IV, 1977.
- |<sup>184</sup>| ZIENKIEWICZ, O. C. and NATH, B. - Analogue Procedure for Determination of Virtual Mass - J. Hydraul. Div.,-ASCE- - 90 (HY5): pp. 69-81, September 1964.
- |<sup>185</sup>| ZIENKIEWICZ, O. C. and NEWTON, R. E. - Coupled Vibrations of a Structure Submerged in a Compressible Fluid - pp. 360-379.
- |<sup>186</sup>| ZIENKIEWICZ, O. C. and BETTESS, P. - Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces, an Introduction to Numerical Treatment - Int. Journal for Num. Meth. in Eng. - Vol. 13, pp. 1-16, 1978.
- |<sup>187</sup>| ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W. and BETTESS, P. - The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures - Int. Journal for Num. Meth. in Eng. - Vol. 11, pp. 355-375, 1977.
- |<sup>188</sup>| SUE, D. K. P.; ARANHA, J. A. and MEI, C. C. - Some Properties of a Hybrid Element Method for Water - Int. Journal for Num. Meth. in Eng. - Vol. 14, pp. 1627 - 1641,
- |<sup>189</sup>| SUBRATA, K. CHAKRABARTI - Wave Forces on Pile Including Diffraction and Viscous Effects - Journal of the Hyd. Division, ASCE, (HY 8), pp. 1219-1233, August 1973.